Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB221 werd in 2003/2004 gegeven door Gunther Cornelissen.

Groepentheorie (WISB221)
27 januari 2004

Er zijn vier vragen. De vragen zijn niet gerangschikt volgens moeilijkheidsgraad. Geef niet enkel antwoorden, laat ook de redenering zien die tot het antwoord leidt. Je mag wel resultaten uit vroegere vragen gebruiken in wat volgt, ook als je die andere vragen niet kan beantwoorden. Het is toegestaan boeken, handouts en aantekeningen te gebruiken.

Opgave 1

(a) Schrijf de permutatie (136)(163)(15423)(152) uit S_6 als product van disjuncte cykels.

(b) Bepaal het teken van de permutatie $(1,2)(1,2,3)(1,2,3,4)(1,2,3,4,5)\dots(1,\dots,2003)$ in S_{2003}.

> Opmerking: tussen de elementen van een cykel is voor de duidelijkheid een komma gezet, zodat bijvoorbeeld de 2-cykel $(12,34)$ niet kan worden verward met de 4-cykel $(1,2,3,4)$.

(c) Schrijf de elementen van de diëdergroep D_8 als $\{e, r, \dots, r^7, s, rs, \dots, r^7 s\}$ voor $r, s \in D_8$ zodat $r^8 = s^2 = e$ en $sr = r^{-1}s$. Welk van deze 16 elementen is $r^5 sr^4 sr^3 sr^2 srs \in D_8$?

(d) Bepaal de orde van $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $GL(2, \mathbf{R})$.

Opgave 2

Geef een voorbeeld van (en motiveer kort), of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

(a) Een homomorfisme van $\mathbf{Z}/13$ naar $SO_{2003}(\mathbf{R})$ dat niet injectief is en niet elk element van $\mathbf{Z}/13$ op de eenheidsmatrix afbeeldt.

(b) een groep van orde $10^{10^{2003}}$ met een ondergroep van orde 2003.

(c) een groep van orde 72 met 7 3-Sylowgroepen.

(d) Een groepsactie van $\mathbf{Z}/10$ op een eindige verzameling X zodat er een element in X bestaat waarvan de baan precies 6 elementen heeft.

Opgave 3

Op hoeveel manieren kan je met 2003 kleuren de vlakken van een regelmatig viervlak (tetraëder) inkleuren (op draaisymmetrieën na)?

Opgave 4

Gegeven is een natuurlijk getal $N > 0$. Stel dat G een (niet noodzakelijk eindige) abelse groep is waarin de orde van elk element een deler is van N. Stel

$$G^\vee := \{\phi : G \to (\mathbf{Z}/N, +)\ ;\ \phi \text{ is groepshomomorfisme }\}.$$

(a) Bewijs dat $G^\vee$ een groep is onder optelling (d.w.z. voor $\phi, \psi \in G^\vee$ is $\phi + \psi$ gedefinieerd door $\forall g \in G\ :\ (\phi + \psi)(g) := \phi(g) + \psi(g)$).

(b) Als G en H twee zulke groepen zijn (die bij dezelfde N horen), en $f : G \to H$ is een groepshomomorfisme, bewijs dan dat $f^\vee : H^\vee \to G^\vee\ :\ \phi \mapsto \phi \circ f$ een groepshomomorfisme is.

(c) Welke N zijn mogelijk als G een eindige cyclische groep is? Bewijs dat $G^\vee \cong G$ voor elk zulke N.

(d) Bewijs dat als G en H bij dezelfde N horen, dan $(G \times H)^\vee \cong G^\vee \times H^\vee$.