Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB221 werd in 2003/2004 gegeven door Gunther Cornelissen.

Groepentheorie (WISB221)
24 februari 2004

Er zijn vier vragen. De vragen zijn niet gerangschikt volgens moeilijkheidsgraad. Geef niet enkel antwoorden, laat ook de redenering zien die tot het antwoord leidt. Je mag wel resultaten uit vroegere vragen gebruiken in wat volgt, ook als je die andere vragen niet kan beantwoorden. Het is toegestaan boeken, handouts en aantekeningen te gebruiken.

Opgave 1

(a) Schrijf de permutatie $(123)(23)(132)$ uit S_3 als product van disjuncte cykels, en geef zijn teken.

(b) Schrijf de elementen van de diëdergroep D_8 als $\{e, r, \ldots, r^7, s, rs, \ldots, r^7s\}$ voor $r, s \in D_8$ zodat $r^8 = s^2 = e$ en $sr = r^{-1}s$. Welk van deze 16 elementen is $r^3sr^5sr \in D_8$?

(c) Bepaal de orde van de matrix $\begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{2003}) & -\sin(\frac{2\pi}{2003}) \\ \sin(\frac{2\pi}{2003}) & \cos(\frac{2\pi}{2003}) \end{pmatrix}$ in $GL(2, \mathbf{R})$.

(d) Teken het ondergroependiagram van A_4 en omcirkel de ondergroepen die normaaldelers zijn in A_4.

Opgave 2

Geef een voorbeeld van (en motiveer kort), of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

(a) een cyclische groep G met een element waarvan de orde niet 1 en niet $\#G$ is;

(b) een groep van orde 2004 met een ondergroep van orde 5;

(c) een enkelvoudige groep van orde 15;

(d) een oneindige groep waarvan elk element eindige orde heeft.

Opgave 3

Op hoeveel manieren kan je met N kleuren de zijden van een vierkant inkleuren (op draaisymmetrieën in de ruimte na)?

Opgave 4

Als G een groep is en H een ondergroep, dan is de *normalisator* van H in G de verzameling

$$N(H) := \{g \in G \; : \; gHg^{-1} = H\}$$

(a) Bewijs dat $N(H)$ een ondergroep is van G.

(b) Bewijs dat $N(H)$ de grootste ondergroep is van G waarin H normaal is, in de volgende zin: als N een ondergroep is van G waarin H normaal is, dan is $N \subseteq N(H)$.

(c) Bepaal $N(\langle r^3 \rangle)$ en $N(\langle s \rangle)$ voor $G = D_6 = \langle r, s \; : \; r^6 = s^2 = rsrs = e \rangle$.

(d) Zij S een p-Sylowgroep van G en H een ondergroep van $N(S)$ zodat $\#H$ een macht van p is. Bewijs dat H een ondergroep is van S.