Hertentamen Groepen WISB221 op maandag 22.12.2014, 13:30 - 16:30

Universiteit Utrecht

The English version of the exam is on pages 3/4. Je kan het tentamen in het Engels of in het Nederlands maken. De opgaven staan in het Nederlands op pp. 1/2 en in het Engels op pp. 3/4.

Schrijf je naam en studentennummer op ieder blad dat je inlevert. Gebruik voor iedere opgave een nieuw blad.

Geef niet enkel antwoorden, laat ook de redenering zien die tot het antwoord leidt.

Het is *niet* toegestaan rekenmachines, computers, telefoons, boeken, handouts en aantekeningen, etc. te gebruiken. Het is wel toegestaan om volgende ontbinding te gebruiken: $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.

Opgave 1. Beantwoord de volgende vragen en beargumenteer dat het antwoord klopt:

`6pt` (a) Wat is het teken van de permutatie

$$\sigma := (1 \dots 19)(20 \dots 38) \cdots (1996 \dots 2014)$$

in S_{2014}?

`6pt` (b) Wat is de orde van $\sigma \in S_{2014}$ uit 1(a)?

`6pt` (c) Schrijf de diëdergroep D_9 als $\{e, x, \dots, x^8, y, yx, \dots, yx^8\}$ voor $x, y \in D_9$ met $x^9 = y^2 = e$ en $xyx = y$. Welke van deze 18 elementen is $x^{2012}y^{2013}x^{2014}$?

`6pt` (d) Geef een voorbeeld van een element van oneindige orde in $\mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$.

Opgave 2. Bewijs of weerleg:

`6pt` (a) Het directe product $G \times H$ van twee niet-commutatieve groepen G en H is nooit commutatief.

`6pt` (b) Er is een groepsisomorfisme $D_4 \cong Q$, waarbij Q de *quaternionengroep* is:

$$Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \colon i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ en } ij = -ji = k\}.$$

`6pt` (c) Als G een groep is van orde 2014 en $\varphi\colon G \to H$ een surjectief groepshomomorfisme is, dan kan de orde van H niet deelbaar zijn door 4.

`6pt` (d) Er bestaat een actie van S_3 op een verzameling X met vijf elementen zodat er voor ieder paar elementen $x, y \in X$ een element $\sigma \in S_3$ bestaat zodat $y = \sigma(x)$.

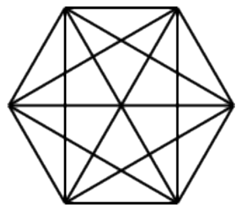
`6pt` (e) Iedere groep van orde $2^2 \cdot 17$ is abels.

[Zie ommezijde]

Opgave 3. Ter herinnering: D_6 is de groep van rotatiesymmetrieën van een regelmatige zeshoek in de ruimte.

10pt (a) Geef de conjugatieklassen in D_6 en bewijs dat je bewering klopt.

10pt (b) Stel dat $n \geq 1$ een geheel getal is. Op hoeveel verschillende manieren, op de actie van D_6 na, kan je de negen diagonalen van een regelmatige zeshoek inkleuren met n kleuren? Het plaatje hieronder laat een zeshoek zien met zijn negen diagonalen.



Opgave 4. Stel dat G een groep is.

2pt (a) Definieer de *commutator ondergroep* $[G, G]$ van G.

8pt (b) Bewijs dat $[G, G]$ een normale ondergroep is van G, en dat het quotient $G^{\mathrm{ab}} := G/[G, G]$ abels is.

Opgave 5. Stel dat G een groep is met $153 = 3^2 \cdot 17$ elementen, en stel dat $G_1 = \mathbf{Z}/153\mathbf{Z}$ en $G_2 = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/51\mathbf{Z}$.

4pt (a) Bewijs dat G_1 en G_2 niet isomorf zijn.

6pt (b) Bewijs dat G unieke ondergroepen heeft van orde 9 en 17, en dat deze ondergroepen normaal zijn.

6pt (c) Bewijs dat G isomorf is met G_1 of G_2.

[Einde]

Group Theory Retake WISB221 on Mon 22 Dec 2014, 13:30 - 16:30

Universiteit Utrecht

De Nederlandse versie van het tentamen staat op pagina 1/2. You can do the exam in Dutch or in English. The questions are displayed in Dutch on page 1/2 and in English on page 3/4.

Write your name and student number on every solution page that you hand in. Use a new page for every question.

Don't just provide the answer, but also show the reasoning that leads to the answer.

You are *not* allowed to use calculators, computers, phones, books, handouts and notes, etc. You are allowed to use the following factorisation: $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.

Question 1. Answer the following questions and argue why your answer is correct:

6pt (a) What is the sign of the permutation

$$\sigma := (1 \ldots 19)(20 \ldots 38) \cdots (1996 \ldots 2014)$$

in S_{2014}?

6pt (b) What is the order of the permutation $\sigma \in S_{2014}$ from 1(a)?

6pt (c) Represent the dihedral group D_9 as $\{e, x, \ldots, x^8, y, yx, \ldots, yx^8\}$ for $x, y \in D_9$ with $x^9 = y^2 = e$ and $xyx = y$. Which of these 18 elements is $x^{2012}y^{2013}x^{2014}$?

6pt (d) Give an example of an element of infinite order in $\mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$.

Question 2. Prove or disprove:

6pt (a) The direct product $G \times H$ of two noncommutative groups G and H is never commutative.

6pt (b) There is a group isomorphism $D_4 \cong Q$, where Q is the *quaternion group*:

$$Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \colon i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ and } ij = -ji = k\}.$$

6pt (c) if G is a group of order 2014 and $\varphi \colon G \to H$ a surjective group homomorphism, then the order of H cannot be divisible by 4.

6pt (d) There exists an action of the group S_3 on a set X with five elements, such that for every pair $x, y \in X$ there exists $\sigma \in S_3$ with $y = \sigma(x)$.

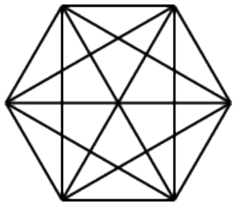
6pt (e) Every group of order $2^2 \cdot 17$ is abelian.

[Please turn over]

Question 3. Recall that D_6 is the group of rotational symmetries of a regular hexagon in 3-space.

10pt (a) List the conjugacy classes in D_6 and prove that your statement is correct.

10pt (b) Let $n \geq 1$ be an integer. In how many different ways, up to the action of D_6, can you color the nine diagonals of a regular hexagon with n colors? The picture below shows a regular hexagon with its nine diagonals.



Question 4. Let G denote a group.

2pt (a) Define the *commutator subgroup* $[G, G]$ of G.

8pt (b) Prove that $[G, G]$ is a normal subgroup of G, and that the quotient $G^{\mathrm{ab}} := G/[G, G]$ is abelian.

Opgave 5. Let G denote a group with $153 = 3^2 \cdot 17$ elements, and let $G_1 = \mathbf{Z}/153\mathbf{Z}$ and $G_2 = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/51\mathbf{Z}$.

4pt (a) Prove that G_1 and G_2 are not isomorphic.

6pt (b) Prove that G has unique subgroups of order 9 and 17, and that these subgroups are normal.

6pt (c) Prove that G is isomorphic to G_1 or G_2.

[The End]