Tentamen groepentheorie

2 november 2015

An English translation follows after the Dutch version. Schrijf duidelijk je naam en studentnummer boven iedere pagina die je inlevert. Een rekenmachine, boeken, aantekeningen of oude opgaves zijn niet toegestaan. Om je vragen te beantwoorden mag je gebruik maken van de resultaten (niet de opgaven) in 'Groups and Symmetry' van Armstrong, tenzij expliciet om een bepaald resultaat wordt gevraagd. Verder mag je de volgende identiteit voor permutatiegroepen gebruiken: $\rho(a_1\ \dots\ a_k)\rho^{-1} = (\rho(a_1)\dots\rho(a_k)), \rho \in S_n, a_i \in \{1,\dots,n\}$. Wellicht dat je ook het product van 3,7 en 97 nodig gaat hebben. Veel succes!

Opgave 1: Permutatiegroepen en diëdergroepen

1. (5pt) Bepaal of de volgende permutatie even of oneven is. Motiveer je antwoord.

$$\tau := (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7\,8)(9\,10\,11\,12)\dots(97\,98\,99\,100)$$

2. (5pt) Zij $\sigma = (1\,2\dots\,100)$. Schrijf de volgende permutatie als product van disjunkte cykels: $\sigma^2\tau\sigma^{-2}$.

3. (5pt) Zij $D_k = \{e, t, \dots, t^{k-1}, s, st, \dots, st^{k-1}\}$ de diëdergroep met voortbrengers s en t die voldoen aan de relatie $stst = e$. Bepaal de orde van $st^{99}sts$ in D_{100}.

4. (10pt) Laat zien dat D_k een ondergroep is van D_n dan en slechts dan als k een deler is van n.

Opgave 2: Waar of niet waar?

Bewijs of weerleg de volgende uitspraken.

1. (5pt) Het produkt van twee cyclische groepen is nooit cyclisch.

2. (10pt) Er is een enkelvoudige groep van orde 2037. (Een groep is per definitie enkelvoudig als de enige normale ondergroepen de identiteit en de groep zelf zijn).

3. (10pt) Een isomorfisme $\varphi : H \to H$ heet *inwendig* als hij van de vorm $\varphi(h) = khk^{-1}$ is voor zekere $k \in H$. Bewijs of weerleg: als $K \lhd H$ en $H \lhd G$ maar niet $K \lhd G$, dan is er een isomorfisme $\varphi : H \to H$ dat niet inwendig is.

4. (10pt) De groepen $\mathbb{Z}^n$ en $\mathbb{Z}^m$ zijn isomorf dan en slechts dan als $m = n$.

Opgave 3: Taarten tellen

Een taart heeft de vorm van een cirkel en is opgedeeld in 6 stukken van dezelfde grootte en vorm. De verdeling is gedaan op de voor de hand liggende manier, dus door de taart 3 keer met een groot mes door het midden te doorsnijden. Je wilt de taart versieren door 2 stukjes chocolade en 2 kaarsen te verdelen over de stukken.[1]

1. (5pt) Bepaal de conjugatieklassen van D_6.
2. (10pt) Gebruik de telstelling om te bepalen op hoeveel verschillende manieren je de verdeling van chocolade en kaarsen kunt maken. We zeggen dat twee verdelingen hetzelfde zijn als de ene uit de andere kan worden verkregen door de taart te draaien of te spiegelen.

Opgave 4: Groepen onderscheiden

Als $n < m$ kunnen we S_n als ondergroep van S_m zien (d.w.z. S_m permuteert $1, \dots, m$ en als ondergroep permuteert S_n alleen de getallen $1, \dots, n$). Beschouw de volgende groepen die we zien als ondergroep van de permutaties van de natuurlijke getallen.

- $A_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.
- $S_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$.
- D_∞ als in Armstrong.

Beschouw nu de volgende isomorfismevragen.

1. (5pt) Laat zien dat A_∞ en S_∞ niet isomorf zijn.
2. (5pt) Laat zien dat D_∞ en A_∞ niet isomorf zijn.

Opgave 5: Isomorfismen

Zij G een *eindige* groep met identiteit e. In het boek is het volgende bewezen. Stel dat $K < G, H < G$ met $K \cap H = \{e\}, KH = G$ en voor alle $k \in K, h \in H$ geldt $hk = kh$. Dan $G \simeq K \times H$.

1. (5pt) Stel dat G abels is en voor alle $g \in G$ geldt $g^2 = e$. Bewijs dat $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. (10pt) Zij $\mathrm{Iso}(G)$ verzameling van alle isomorfismen $G \to G$. Laat zien dat $\mathrm{Iso}(G)$ precies 1 element bevat dan en slechts dan als $|G| \leq 2$.

[1] Er mogen meerdere kaarsen en/of stukjes chocolade op één stuk staan.

Exam group theory

November 2, 2015

Clearly put your student id number above each page you hand in. You are not allowed to use a calculator, books, notes or exercises. To answer the questions you may use any of the results (but not the exercises) in 'Groups and Symmetry' by Armstrong, unless the proof of a result is explicitly asked. In addition you may use the following identity for permutation groups: $\rho(a_1\ \dots\ a_k)\rho^{-1} = (\rho(a_1)\dots\rho(a_k)), \rho \in S_n, a_i \in \{1,\dots,n\}$. You might want to compute the product of 3,7 and 97 at some point. Good luck!

Exercise 1: Permutation groups and dihedral groups

1. (5pt) Determine if the following cykel is even or odd. Motivate your answer.
$$\tau := (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7\,8)(8\,9\,10\,11)\dots(97\,98\,99\,100)$$
2. (5pt) Let $\sigma = (1\,2\dots\ 100)$. Determine the cykel $\sigma^2\tau\sigma^{-2}$ by writing it as a product of disjoint cykels.
3. (5pt) Let $D_k = \{e, t, \dots, t^{k-1}, s, st, \dots, st^{k-1}\}$ be the dihedral group with generators s and t which satisfy $stst = e$. Determine the order of $st^{99}sts$ in D_{100}.
4. (10pt) Show that D_k is a subgroup of D_n if and only if k divides n.

Exercise 2: True or false?

Prove or disprove the following statements.

1. (5pt) The product of two cyclic groups is never cyclic.
2. (10pt) There exists a simple group of order 2037. (Recall that a group is simple if the only normal subgroups are the identity and the group itself).
3. (10pt) An isomorphism $\varphi : H \to H$ is called *inner* if it is of the form $\varphi(h) = khk^{-1}$ for some $k \in H$. Prove or disprove: Suppose that $K \lhd H$ and $H \lhd G$ but not $K \lhd G$, then there exists an isomorphism $\varphi : H \to H$ that is not inner.
4. (10pt) The groups $\mathbb{Z}^m$ and $\mathbb{Z}^n$ are isomorphic if and only if $m = n$. Hint: How many homomorphisms are there from $\mathbb{Z}^m$ to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Exercise 3: Counting cakes

A cake has the shape of a circle and is divided into 6 equals pieces. The division is done in the obvious way, namely by cutting the piece three times with a large knife through its center. You want to decorate the cake by dividing 2 pieces of chocolate and 2 candles over the pieces.[2]

1. (5pt) Determine the conjugation classes of D_6.
2. (10pt) Use the counting theorem in order to determine in how many ways you can decorate the cake with candles and chocolate in the above way? Two decorations are the same if one can be obtained through the other by rotating or mirroring the cake.

Exercise 4: Distinguishing groups

In case $n < m$ we may consider S_n a subgroup of S_m (so S_m permutes the numbers $1, \ldots, m$ and as a subgroup S_n permutes only $1, \ldots, n$). Consider the following groups which we then view as groups of permutations of the natural numbers.

- $A_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.
- $S_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$.
- D_∞ as in Armstrong.

Consider now the following isomorphism questions.

1. (5pt) Prove that A_∞ and S_∞ are not isomorphic.
2. (5pt) Prove that D_∞ and A_∞ are not isomorphic.

Exercise 5: Isomorphisms

Let G be a *finite* group with identitity e. Armstrong proves the following. Let $K < G, H < G$ with $K \cap H = \{e\}$, $KH = G$ and for all $k \in K, h \in H$ we have $hk = kh$. Then $G \simeq K \times H$.

1. (5pt) Suppose that G is abelian and for all $g \in G$ we have $g^2 = e$. Prove that $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. (10pt) Let $\mathrm{Iso}(G)$ be the set of all isomorphisms $G \to G$. Show that $\mathrm{Iso}(G)$ contains exactly 1 element if and only if $|G| \leq 2$.

[2]It is allowed to have multiple candles/pieces of chocolate on one piece.