Tentamen groepentheorie – Antwoorden

2 november 2015

An English translation follows after the Dutch version. Schrijf duidelijk je naam en studentnummer boven iedere pagina die je inlevert. Een rekenmachine, boeken, aantekeningen of oude opgaves zijn niet toegestaan. Om je vragen te beantwoorden mag je gebruik maken van de resultaten (niet de opgaven) in 'Groups and Symmetry' van Armstrong, tenzij expliciet om een bepaald resultaat wordt gevraagd. Verder mag je de volgende identiteit voor permutatiegroepen gebruiken: $\rho(a_1 \, \dots \, a_k)\rho^{-1} = (\rho(a_1) \dots \rho(a_k)), \rho \in S_n, a_i \in \{1, \dots, n\}$. Wellicht dat je ook het product van 3,7 en 97 nodig gaat hebben. Veel succes!

Opgave 1: Permutatiegroepen en diëdergroepen

1. (5pt) Bepaal of de volgende permutatie even of oneven is. Motiveer je antwoord.

$$\tau := (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7\,8)(9\,10\,11\,12)\dots(97\,98\,99\,100)$$

Antwoord: Een 4-cykel is een produkt van een oneven aantal 2-cykels, bijvoorbeeld $(1\,2\,3\,4) = (1\,2)(2\,3)(3\,4)$. τ is een product van 25 4-cykels, dus een produkt van een oneven aantal 2-cykels. τ is dus oneven.

2. (5pt) Zij $\sigma = (1\,2\dots\,100)$. Schrijf de volgende permutatie als product van disjunkte cykels: $\sigma^2\tau\sigma^{-2}$. **Antwoord:** $(3\,4\,5\,6)(7\,8\,9\,10)\,\dots\,(95\,96\,97\,98)(99\,100\,1\,2)$.

3. (5pt) Zij $D_k = \{e, t, \dots, t^{k-1}, s, st, \dots, st^{k-1}\}$ de diëdergroep met voortbrengers s en t die voldoen aan de relatie $stst = e$. Bepaal de orde van $st^{99}sts$ in D_{100}. **Antwoord:** Dit element is gelijk aan st^{98} en dat heeft orde 2.

4. (10pt) Laat zien dat D_k een ondergroep is van D_n dan en slechts dan als k een deler is van n. **Antwoord:** als $D_k < D_n$ dan geeft de stelling van Lagrange dat $2k \mid 2n$ en dus $k \mid n$. Andersom, stel dat $k \mid n$. Dan zij $D_n := \{e, t, \dots, t^{n-1}, s, st, \dots, st^{n-1}\}$. De groep voortgebracht door $t^{k/n}$ en s is een kopie van D_k die een ondergroep van D_n vormt.

Opgave 2: Waar of niet waar?

Bewijs of weerleg de volgende uitspraken.

1. (5pt) Het produkt van twee cyclische groepen is nooit cyclisch. **Antwoord:** Dit is niet waar. In het boek is bewezen dat $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ cyclisch is desda $ggd(m, n) = 1$.

2. (10pt) Er is een enkelvoudige groep van orde 2037. (Een groep is per definitie enkelvoudig als de enige normale ondergroepen de identiteit en de groep zelf zijn). **Antwoord:** Dit is niet waar. De groep (zeg G) heeft namelijk een ondergroep van orde 97, zeg H (Sylowstelling). Het aantal ondergroepen van deze orde is gelijk aan 1 modulo 97 en is een deler van $2037/97 = 21$ (Sylowstelling). De enige zulke deler is 1, dus H is de unieke ondergroep van orde 97. Dit betekent dat voor elke $g \in G$ de groep gHg^{-1} (zijnde een ondergroep van G van orde 97) gelijk moet zijn aan H. Dus H is normaal in G en dus is G niet enkelvoudig.

3. (10pt) Een isomorfisme $\varphi : H \to H$ heet *inwendig* als hij van de vorm $\varphi(h) = khk^{-1}$ is voor zekere $k \in H$. Bewijs of weerleg: als $K \lhd H$ en $H \lhd G$ maar niet $K \lhd G$, dan is er een isomorfisme $\varphi : H \to H$ dat niet inwendig is. **Antwoord:** Dit is waar. Omdat niet $K \lhd G$ is er een $g \in G$ met $gKg^{-1} \neq K$. Bekijk nu $\varphi : H \to H : x \mapsto gxg^{-1}$ (het beeld ligt in H omdat $H \lhd G$) als dit inwendig zou zijn, dan zou er een $h \in H$ zijn met $\varphi(x) = hxh^{-1}$ maar dan omdat $K \lhd H$ zou gelden $\varphi(K) = K$ wat een tegenspraak oplevert.

4. (10pt) De groepen $\mathbb{Z}^n$ en $\mathbb{Z}^m$ zijn isomorf dan en slechts dan als $m = n$. Hint: hoeveel homomorfismen zijn er van $\mathbb{Z}^n$ naar $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? **Antwoord 1:** Dit is waar. $\mathbb{Z}^n$ wordt voortgebracht door n elementen $e_n := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Dus ieder homomorfisme $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wordt bepaald door de beelden $\varphi(e_n)$. Er zijn dus ten hoogste 2^n zulke homomorfismen. Andersom voor iedere keuze van $x_n \in \{0, 1\}$ is $k_1e_1 + \ldots + k_ne_n \mapsto \sum_i k_ix_i$ een homomorfisme (de eisen zijn makkelijk te controleren). Dus het aantal homomorfismen $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is 2^n. Er volgt $\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^m$ desda $2^n = 2^m$.

   Antwoord 2: (*Dit antwoord maakt gebruik van vectorruimten over het lichaam $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Mocht je dit antwoord hebben gegeven is dat goed gekeurd, hoewel het misschien niet bij lineaire algebra behandeld is.*) $\mathbb{Z}^n$ wordt voortgebracht door de n vectoren $e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), 1 \leq i \leq n$. Als we kunnen bewijzen dat $\mathbb{Z}^n$ niet door minder vectoren voortgebracht wordt dan zijn we klaar. Stel daarom dat $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n$ de groep $\mathbb{Z}^n$ voortbrengen. Zij $\overline{v}_i$ de vector in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ met entries gegeven door de entries van v_i modulo 2. Dan brengen $\overline{v}_i, 1 \leq i \leq k$ de vectorruimte $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ voort. Maar $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ is een n-dimensionale vectorruimte over het lichaam $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en daarom moet $k \geq n$.

Opgave 3: Taarten tellen

Een taart heeft de vorm van een cirkel en is opgedeeld in 6 stukken van dezelfde grootte en vorm. De verdeling is gedaan op de voor de hand liggende manier, dus door de taart 3 keer met een groot mes door het midden te doorsnijden. Je wilt de taart versieren door 2 stukjes chocolade en 2 kaarsen te verdelen over de stukken.[1]

1. (5pt) Bepaal de conjugatieklassen van D_6. **Antwoord:** $\{e\}, \{t^3\}, \{t, t^5\}$, $\{t^2, t^4\}, \{s, st^2, st^4\}, \{st, st^3, st^5\}$.

2. (10pt) Gebruik de telstelling om te bepalen op hoeveel verschillende manieren je de verdeling van chocolade en kaarsen kunt maken. We zeggen dat twee verdelingen hetzelfde zijn als de ene uit de andere kan worden verkregen door de taart te draaien of te spiegelen. **Antwoord:** Voor de respectievelijke conjugatieklassen uit de eerste opgave zijn er het volgende aantal vaste punten (we houden het antwoord hier beknopt): $21^2, 3^2, 0, 0, 3^2, 5^2$. Totaal geeft: $\frac{1}{12}(21^2 \times 1 + 3^2 \times 1 + 0 + 0 + 3^2 \times 3 + 5^2 \times 3) = 46$. *Opmerking:* Op deze opgave is maar ongeveer de helft van de punten gescoord, meestal door telfouten!

Opgave 4: Groepen onderscheiden

Als $n < m$ kunnen we S_n als ondergroep van S_m zien (d.w.z. S_m permuteert $1, \ldots, m$ en als ondergroep permuteert S_n alleen de getallen $1, \ldots, n$). Beschouw de volgende groepen die we zien als ondergroep van de permutaties van de natuurlijke getallen.

- $A_\infty = \cup_{n=1}^\infty A_n$.
- $S_\infty = \cup_{n=1}^\infty S_n$.
- D_∞ als in Armstrong.

Beschouw nu de volgende isomorfismevragen.

1. (5pt) Laat zien dat A_∞ en S_∞ niet isomorf zijn. **Antwoorden:** Er zijn meerdere mogelijkheden. Hier zijn er 4. **Antwoord 1:** A_∞ wordt voortgebracht door zijn kwadraten, daarmee bedoelen we de elementen $x^2, x \in A_\infty$ (dit is zo want $x = x^{-2}$ voor elke 3-cykel en iedere A_n wordt voortgebracht door 3-cykels). S_∞ wordt niet voortegebracht door zijn kwadraten want een kwadraat is altijd een even permutatie. **Antwoord 2:** A_∞ wordt voortgebracht door elementen van orde 3 en S_∞ niet. (Inderdaad: de 3-cykels brengen A_∞ voort. Een element van orde 3 moet een product van disjunkte 3-cykels zijn dus dat is automatisch even en daarom kan S_∞ niet voortgebracht worden door deze elementen.) **Antwoord 3:** A_∞ is enkelvoudig en S_∞ niet. Inderdaad is het makkelijk te zien dat S_∞ de groep A_∞ als normale ondergroep bevat. Om te bewijzen dat A_∞ enkelvoudig is, zij $H \lhd A_\infty$ en $H \neq \{e\}$. Zij n zodanig dat $H \cap A_n$ niet gelijk aan $\{e\}$ is. Dan is $H \cap A_n$ een normale ondergroep van A_n. Omdat A_n enkelvoudig is (als je dit niet hebt bewezen is dit goed gekeurd, het is

[1] Er mogen meerdere kaarsen en/of stukjes chocolade op één stuk staan.

in het college behandeld) geldt dan $H \cap A_n = A_n$. Omdat dus voor grote n geldt $H \cap A_n = A_n$ weten we $H = A_\infty$. **Antwoord 4:** Je kunt bewijzen dat $[A_\infty, A_\infty] = A_\infty$ en $[S_\infty, S_\infty] = A_\infty$. Dus in het laatste geval is de commutator ondergroep niet gelijk aan de hele groep.

2. (5pt) Laat zien dat D_∞ en A_∞ niet isomorf zijn. **Antwoord:** D_∞ bevat alleen maar elementen van orde 2 of ∞ (van beide ordes zijn er oneindig veel!). De cykel (12345) zit in A_∞ en heeft orde 5.

   Opmerking: Een typische fout in deze opgave is dat mensen zeiden dat A_∞ geen elementen van orde 2 bevat. Dit is niet waar: (12)(34) is een even permutatie maar heeft orde 2!

Opgave 5: Isomorfismen

Zij G een *eindige* groep met identiteit e. In het boek is het volgende bewezen. Stel dat $K < G, H < G$ met $K \cap H = \{e\}, KH = G$ en voor alle $k \in K, h \in H$ geldt $hk = kh$. Dan $G \simeq K \times H$.

1. (5pt) Stel dat G abels is en voor alle $g \in G$ geldt $g^2 = e$. Bewijs dat $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. **Antwoord 1:** Zij $\{g_1, \ldots, g_k\}$ een minimale (!!) set voortbrengers van G. Dan is iedere $g \in G$ uniek (!!) te schrijven als product $g = g_1^{l_1} \ldots g_k^{l_k}$ met $l_i \in \{0, 1\}$ (want?). Je controleert dan makkelijk dat $g \mapsto (l_1, \ldots, l_k)$ het gevraagde isomorfisme is. **Antwoord 2:** Zij opnieuw $\{g_1, \ldots, g_k\}$ een minimale (!!) set voortbrengers van G. We bewijzen met inductie naar s dat de groep $H_s < G$ voortgebracht door $\{g_1, \ldots, g_s\}$ isomorf is met een s-voudig Cartesisch product $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Het geval $s = 0$ is triviaal. Stel dat dit bewezen is voor $s - 1$ en bekijk de groep $H_s :=< H_{s-1}, g_s >$. De groepen $H := H_{s-1}$ en $K = \{e, g_s\}$ voldoen aan de voorwaarden van de stelling die aan het begin van de opgave is geciteerd (eenvoudig). Daarom $H_s \simeq H_{s-1} \times K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (s-voudig Cartesisch product) en de inductiestap is bewezen. Omdat G eindig is volgt de opgave uit de inductiehypothese.

2. (10pt) Zij $\mathrm{Iso}(G)$ verzameling van alle isomorfismen $G \to G$. Laat zien dat $\mathrm{Iso}(G)$ precies 1 element bevat dan en slechts dan als $|G| \leq 2$. **Antwoord:** Als G niet abels is dan is er $g, x \in G$ zodanig dat $x \neq gxg^{-1}$. De afbeelding $y \mapsto gyg^{-1}$ is dan een niet triviaal isomorfisme van G. Veronderstel dat G abels is. Dan is $y \mapsto y^{-1}$ een isomorfisme en dit isomorfisme is niet-triviaal tenzij G aan de veronderstellingen van de eerste deelopgave voldoet. Veronderstel nu dat G abels is en voor alle $g \in G$ geldt $g^2 = e$. Dan $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dan is de afbeelding $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, \ldots, x_n, x_1)$ een isomorfisme dat niet triviaal is tenzij $|G| = 2$. Samengevat hebben we bewezen dat er een niet triviaal isomorfisme is van G als $|G| \geq 3$. De opgave volgt nu eenvoudig.

Exam group theory – Answers

November 2, 2015

Clearly put your student id number above each page you hand in. You are not allowed to use a calculator, books, notes or exercises. To answer the questions you may use any of the results (but not the exercises) in 'Groups and Symmetry' by Armstrong, unless the proof of a result is explicitly asked. In addition you may use the following identity for permutation groups: $\rho(a_1\ \dots\ a_k)\rho^{-1} = (\rho(a_1)\dots\rho(a_k)), \rho \in S_n, a_i \in \{1, \dots, n\}$. You might want to compute the product of 3,7 and 97 at some point. Good luck!

Exercise 1: Permutation groups and dihedral groups

1. (5pt) Determine if the following cykel is even or odd. Motivate your answer.

$$\tau := (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7\,8)(8\,9\,10\,11)\dots(97\,98\,99\,100)$$

   Answer: A 4-cykel is an odd product of 2-cykels, for example $(1\,2\,3\,4) = (1\,2)(2\,3)(3\,4)$. τ is a product of 25 4-cykels and there for a product of an odd number of 2-cykels. So τ is odd.

2. (5pt) Let $\sigma = (1\,2\dots\,100)$. Determine the cykel $\sigma^2\tau\sigma^{-2}$ by writing it as a product of disjoint cykels. **Answer:** $(3456)(78910)\dots(95969798)(9910012)$.

3. (5pt) Let $D_k = \{e, t, \dots, t^{k-1}, s, st, \dots, st^{k-1}\}$ be the dihedral group with generators s and t which satisfy $stst = e$. Determine the order of $st^{99}sts$ in D_{100}. **Answer:** This element equals st^{98} which has order 2.

4. (10pt) Show that D_k is a subgroup of D_n if and only if k divides n. **Answer:** If $D_k < D_n$ then by Lagrange's theorem $2k \mid 2n$ so $k \mid n$. Conversely if $D_n := \{e, t, \dots, t^{n-1}, s, st, \dots, st^{n-1}\}$ then the group generated by $t^{k/n}$ and s forms a copy of D_k in D_n.

Exercise 2: True or false?

Prove or disprove the following statements.

1. (5pt) The product of two cyclic groups is never cyclic. **Answer:** This is false. In the book it is proved that $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ is cyclic if $gcd(n, m) = 1$.

2. (10pt) There exists a simple group of order 2037. (Recall that a group is simple if the only normal subgroups are the identity and the group itself). **Answer:** This is false. Call the group G. There is a subgroup of order 97, say H (Sylow theorem). Moreover the number of subgroups with this order is a factor of 21 and equals 1 modulo 97 (Sylow theorem). This factor can only be 1 and so H is the unique subgroup of G of order 97. So for all $g \in G$ we must have $gHg^{-1} = H$ (as gHg^{-1} is a subgroup of G of

order 97) which yields that H is normal. So G has a non-trivial normal subgroup and therefore by definition is not simple.

3. (10pt) An isomorphism $\varphi : H \to H$ is called *inner* if it is of the form $\varphi(h) = khk^{-1}$ for some $k \in H$. Prove or disprove: Suppose that $K \lhd H$ and $H \lhd G$ but not $K \lhd G$, then there exists an isomorphism $\varphi : H \to H$ that is not inner. **Answer:** it is true. Suppose that all isomorphisms $H \to H$ are inner. Let $g \in G$. Then the map $\varphi : H \to H : x \mapsto gxg^{-1}$ (which exists as $H \lhd G$) is an inner isomorphism and therefore there exists $h \in H$ such that $\varphi(x) = hxh^{-1}$. But then $\varphi(K) = K$ as $K \lhd H$. So for all $g \in G$ we have $gKg^{-1} = K$ contradicting that not $K \lhd G$.

4. (10pt) The groups $\mathbb{Z}^m$ and $\mathbb{Z}^n$ are isomorphic if and only if $m = n$. Hint: How many homomorphisms are there from $\mathbb{Z}^m$ to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? **Answer:** It is true. Any homomorphism $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is determined by the images of the generators $e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. So there can be at most 2^n such homomorphisms. Conversely for every choice $x_i \in \{0, 1\}$ the map $\sum_{i=1}^n k_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n k_i x_i$ is a homomorphism (easy to check) so that there are exactly 2^n such homomorphisms. Therefore $\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^m$ iff $n = m$.

Exercise 3: Counting cakes

A cake has the shape of a circle and is divided into 6 equals pieces. The division is done in the obvious way, namely by cutting the piece three times with a large knife through its center. You want to decorate the cake by dividing 2 pieces of chocolate and 2 candles over the pieces.[2]

1. (5pt) Determine the conjugation classes of D_6. **Answer:** $\{e\}, \{t^3\}, \{t, t^5\}, \{t^2, t^4\}, \{s, st^2, st^4\}, \{st, st^3, st^5\}$.

2. (10pt) Use the counting theorem in order to determine in how many ways you can decorate the cake with candles and chocolate in the above way? Two decorations are the same if one can be obtained through the other by rotating or mirroring the cake. **Answer:** For the respective conjugation classes one finds the following number of fixed points: $21^2, 3^2, 0, 0, 3^2, 5^2$. Therefore the total number of cakes is: $\frac{1}{12}(21^2 \times 1 + 3^2 \times 1 + 0 + 0 + 3^2 \times 3 + 5^2 \times 3) = 46$. *Remark:* The avarage score on this exercise is around 5 out of 10 points due to miscounts.

Exercise 4: Distinguishing groups

In case $n < m$ we may consider S_n a subgroup of S_m (so S_m permutes the numbers $1, \ldots, m$ and as a subgroup S_n permutes only $1, \ldots, n$). Consider the following groups which we then view as groups of permutations of the natural numbers.

[2] It is allowed to have multiple candles/pieces of chocolate on one piece.

- $A_\infty = \cup_{n=1}^\infty A_n$.
- $S_\infty = \cup_{n=1}^\infty S_n$.
- D_∞ as in Armstrong.

Consider now the following isomorphism questions.

1. (5pt) Prove that A_∞ and S_∞ are not isomorphic. **Answer:** There are several answers. At least the following 4. **Answer 1:** A_∞ is generated by its squares, i.e. the elements $x^2, x \in A_\infty$. Indeed this is true as every 3-cykel x has the property $x = (x^{-1})^2$ and each A_n is generated by 3-cykels. S_∞ is clearly not generated by its squares as these are even. **Answer 2:** A_∞ is generated by elements of order 3 (as each A_n is generated by 3-cykels). S_∞ is not generated by elements of order 3, because those elements must be disjoint products of 3-cykels which are even. **Answer 3:** A_∞ is simple and S_∞ is not simple. To show this let $H \lhd A_\infty$ have more than 1 element. Let n be so large that $H \cap A_n$ has more than 2 element. Because $H \cap A_n \lhd A_n$ we must have that $H \cap A_n = A_n$. As this holds for all large n we have that $H = A_\infty$. **Answer 4:** One may show that $[A_\infty, A_\infty] = A_\infty$ and $[S_\infty, S_\infty] = A_\infty$.

2. (5pt) Prove that D_∞ and A_∞ are not isomorphic. **Answer:** All elements of D_∞ have order either 2 or ∞. A_∞ also has elements of order 3.

   Remark: Many people said that A_∞ does not contain an element of order 2. This is not true: (12)(34) is even and has order 2.

Exercise 5: Isomorphisms

Let G be a *finite* group with identitity e. Armstrong proves the following. Let $K < G, H < G$ with $K \cap H = \{e\}$, $KH = G$ and for all $k \in K, h \in H$ we have $hk = kh$. Then $G \simeq K \times H$.

1. (5pt) Suppose that G is abelian and for all $g \in G$ we have $g^2 = e$. Prove that $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. **Answer 1:** (This is a correct answer given by multiple people). Let $\{g_1, \ldots, g_k\}$ be a minimal (!!) set of generators of G. Then every $g \in G$ can uniquely (!!) be written as $g = g_1^{l_1} \ldots g_k^{l_k}$ with $l_k \in \{0, 1\}$. The mapping $g \mapsto (l_1, \ldots, l_k)$ defines an isomorphism $G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (you should check this, though it is not hard!). **Answer 2:** Let again $\{g_1, \ldots, g_k\}$ be a minimal (!!) set of generators of G. By induction we will show that $H_s := < g_1, \ldots, g_s >$ is isomorphic to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. The case $s = 0$ is trivial. For the induction one checks that $H := H_{s-1}$ and $K = \{e, g_s\}$ satisfy the assumptions of the theorem quoted above. So $H_s \simeq H_{s-1} \times K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (s Cartesian products). As G is finite the induction concludes the exercise.

2. (10pt) Let $\mathrm{Iso}(G)$ be the set of all isomorphisms $G \to G$. Show that $\mathrm{Iso}(G)$ contains exactly 1 element if and only if $|G| \leq 2$. **Answer:** The if part is easy. Conversely Suppose that G only admits one isomorphism to itself. Then for all $g \in G$ the map $G \mapsto G : x \mapsto gxg^{-1}$ must be trivial so that G is abelian. Then the isomorphism $G \to G : x \mapsto x^{-1}$ must be trivial so that $g^2 = e$ for all $g \in G$. By the first exercise $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and therefore the shift isomorphism $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$ must be trivial. So $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ or G is just $\{e\}$.