Tentamen groepentheorie

21 december2015

An English translation follows after the Dutch version. Schrijf duidelijk je naam en studentnummer boven iedere pagina die je inlevert. Een rekenmachine, boeken, aantekeningen of oude opgaves zijn niet toegestaan. Om je vragen te beantwoorden mag je gebruik maken van de resultaten (niet de opgaven) in 'Groups and Symmetry' van Armstrong, tenzij expliciet om een bepaald resultaat wordt gevraagd. Verder: een groep G heet enkelvoudig als de enige normale ondergroepen gegeven zijn door G en $\{e\}$ met $e \in G$ het eenheidselement.

Opgave 1: Permutatiegroepen en diëdergroepen

1. (5pt) Hoeveel elementen van orde 2 heeft D_{72}? Motiveer je antwoord.
2. (5pt) Geef expliciet de conjugatieklassen van D_{14}.
3. (5pt) Wat is de orde van het volgende element in S_5:
$$(1\,2\,3)(4\,5)(1\,2\,3)(4\,5)(3\,4).$$
4. (5pt) Laat zien dat D_{73} niet isomorf is met een ondergroep van S_{72}.

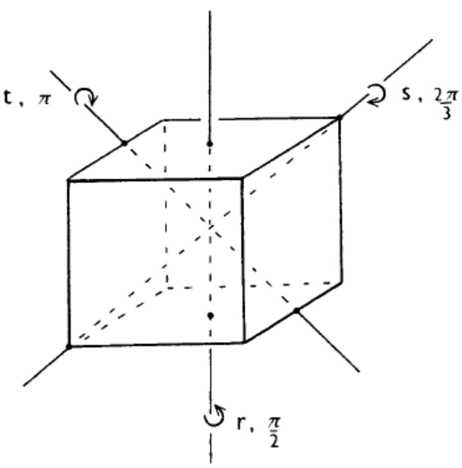
Opgave 2: Waar of niet waar?

Bewijs of weerleg de volgende uitspraken.

1. (7pt) Zij G een groep met de eigenschap dat voor alle $g \in G$ geldt dat $g^2 = e$. Dan is G abels.
2. (7pt) Zij G een groep met de eigenschap dat voor alle $g \in G$ geldt dat $g^{37} = e$. Dan is er een $n \in \mathbb{N}$ met $|G| = 37^n$.
3. (7pt) Er is een enkelvoudige groep van orde 2015.
4. (7pt) Er zijn precies 6 homomorfismen van D_{21} naar D_{15}.
5. (7pt) Zij G een groep van orde 15 die werkt op een verzameling X van 7 punten. Dan is er een vast punt in X, d.w.z. er is een $x \in X$ met $g(x) = x$ voor alle $g \in G$.

Opgave 3: Een kubus met stippen

(15pt) Je wilt 3 stippen op de zijvlakken van een kubus zetten. Bepaal met behulp van de telstelling op hoeveel manieren je de 3 stippen over de zijvlakken van een kubus kunt verdelen. Twee verdelingen zijn hetzelfde als de ene door een draaiing van de kubus uit de andere verkregen kan worden. Je mag de volgende figuur uit Armstrong's boek gebruiken om je antwoord te motiveren. Je mag ook gebruiken dat de conjugatieklassen van e, r, r^2, s en t respectievelijk $1, 6, 3, 8$ en 6 elementen bevatten. Formuleer expliciet de telstelling in je antwoord en laat zien hoe je die toepast. OPMERKING: Om mogelijke verwarring te voorkomen: de stippen hebben allemaal dezelfde kleur en er mogen meerdere stippen op één vlak staan.



Opgave 4: Enkelvoudige groepen

S_m was gedefinieerd als de permutatie groep van de getallen 1 tot en met m. Voor $n < m$ kunnen we S_n als ondergroep van S_m zien door alleen de getallen 1 tot en met n te permuteren. In het college is bewezen dat $A_n, n \geq 5$ een enkelvoudige groep is. Je mag dit gebruiken om deze opgave op te lossen (als je dit op de één of andere manier kunt gebruiken om Opgave 5 op te lossen dan mag dat).

(15pt) Beschouw $A_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ als permutatie van alle natuurlijke getallen. Laat zien dat A_∞ enkelvoudig is.

Opgave 5: Groepen onderscheiden

(15pt) Veronderstel $n \geq 5$. Laat zien dat de groepen S_n en $A_n \times A_n$ niet isomorf zijn.

Group theory

21 december2015

See the first two pages for the Dutch version. Clearly write your name and student number above each page you hand in. A calculator, books, notes, old exercises et cetera are not allowed. You may use the results in Armstrong's book to answer the questions. Finally: recall that a group G is called simple if the only normal subgroups of G are $e \in G$ and G itself.

Exercise 1: Permutation and dihedral groups

1. (5pt) How many elements of order 2 does D_{72} have? Motivate your answer.
2. (5pt) Give explicitly the conjugation classes of D_{14}.
3. (5pt) What is the order of the following element in S_5:
$$(1\,2\,3)(4\,5)(1\,2\,3)(4\,5)(3\,4).$$
4. (5pt) Show that D_{73} is not isomorphic to a subgroup of S_{72}.

Exercise 2: True or false?

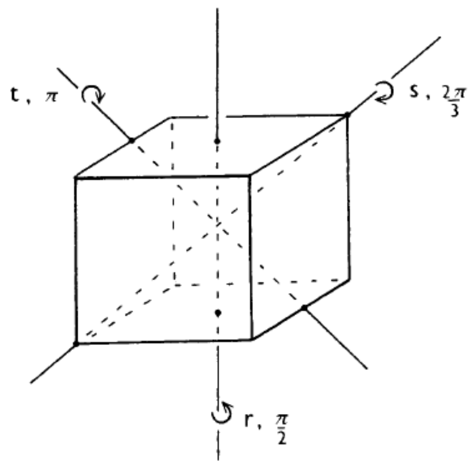
Prove or disprove the following statements.

1. (7pt) Let G be a group with the property that for all $g \in G$ we have $g^2 = e$. Then G is abelian.
2. (7pt) Let G be a group with the property that for all $g \in G$ we have $g^{37} = e$. Then there exists $n \in \mathbb{N}$ with $|G| = 37^n$.
3. (7pt) There exists a simple group of order 2015.
4. (7pt) There are exactly 6 homomorphisms from D_{21} to D_{15}.
5. (7pt) Let G be a group of order 15 that acts on a set X of 7 points. Then there is a fixed point in X, i.e. there exists $x \in X$ with $g(x) = x$ for all $g \in G$.

Exercise 3: A cube with dots

(15pt) You want to put 3 dots on the faces of a cube. Use the counting theorem to count in how many ways one can divide the 3 dots over the faces. Two divisions are called equal if one can be obtained from the other through rotating the cube. You may use the following figure taken from Armstrong's book to motivate your answer. You may also use that the conjugation classes of e, r, r^2, s

and t have respectively $1, 6, 3, 8$ en 6 elements. Formulate the counting theorem explicitly and motivate how it is applied. Remark: To prevent possible confusion: the dots have the same color, there can be multiple dots on one face.



Exercise 4: Simple groups

Recall that S_m is the group of permutations of the numbers 1 to m. For $n < m$ we may view S_n as a subgroup of S_m by permuting only the numbers 1 to n. In the lectures we proved that $A_n, n \geq 5$ is simple. You may use this to resolve this exercise (if you think it is useful you may also use it for Exercise 5).

(15pt) Consider $A_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ as a permutation of the natural numbers. Show that A_∞ is simple.

Exercise 5: Distinguishing groups

(15pt) Let $n \geq 5$. Show that S_n and $A_n \times A_n$ are not isomorphic.