Deeltentamen *Groepentheorie* (WISB221). A. Henriques, Jan 2012.

Geef niet alleen anwoorden, maar bewijs al je beweringen.

Opgave 1 Wat is de definitie van een normale deelgroep? **[3pt]** [1pt]
Maak een lijst van alle deelgroepen van de quaternionengroep Q. [1pt]
Laat zien dat alle deelgroepen van Q normaal zijn. [1pt]

Opgave 2 Bewijs de volgende bewering of zijn tegengestelde: **[3pt]**

"Ieder groep van orde 24 *heeft een transitieve actie op een verzameling van cardinaliteit* 8*."*

Opgave 3 Wat is de definitie van een "p-Sylow deelgroep"? **[4pt]** [1pt]
Stel nu $p = 11$. Wat is de orde van een 11-Sylow deelgroep van de symmetrische groep S_{100}? [1pt]
Geef een voorbeeld van zo een 11-Sylow deelgroep. Is deze deelgroep abels? [1pt]
Zijn alle 11-Sylow deelgroepen van S_{100} abels (en waarom)? [1pt]

Opgave 4 Wat is de definitie van een "semidirect product"? **[2pt]** [1pt]
Zij $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ een homomorfisme, en zij $H \rtimes G$ het bijhorende semidirecte product.
Laat zien dat als $H \rtimes G$ abels is, dan is φ triviaal. [1pt]

Opgave 5 Zij $F_2 := \langle x, y\rangle$ de vrije groep met twee voortbrengers en zij $G := \langle x, y|(xy)^3\rangle$. **[3pt]**
Dan is $G = F_2/N$ voor een bepaalde deelgroep N.
Leg uit hoe N is gedefiniëerd. [1pt]
Laat zien dat $x^2yxyxyx^{-2}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} \in N$. [1pt]
Laat zien dat de twee voortbrengers x, y van G aan de relatie $yxy = x^{-1}y^{-1}x^{-1}$ voldoen. [1pt]

Opgave 6 Zij $p \neq q$ twee priemgetallen en G, H twee groepen zodanig dat $|G| = p^n$ en $|H| = q^m$. **[3pt]**
Bewijs dat $G \times H$ precies één p-Sylow deelgroep heeft.