Deeltentamen *Groepentheorie* (WISB221). A. Henriques, Jan 2012.

Geef niet alleen anwoorden, maar bewijs al je beweringen.

Opgave 1 Wat is de definitie van een normale deelgroep? **[3pt]** [1pt]
Maak een lijst van alle deelgroepen van de quaternionengroep Q. [1pt]
Laat zien dat alle deelgroepen van Q normaal zijn. [1pt]

Oplossing: $H \lhd G$ als H een vereniging van G-conjugatie classen is. De deelgroepen van Q zijn $\{e\}$, $\langle i\rangle$, $\langle j\rangle$, $\langle k\rangle$, $\langle -1\rangle$, Q en de conjugatie classen van Q zijn $\{e\}$, $\{-1\}$, $\{\pm i\}$, $\{\pm j\}$, $\{\pm k\}$. Ieder deelgroep is een vereniging van conjugatie classen, en dus normaal.

Opgave 2 Bewijs de volgende bewering of zijn tegengestelde: **[3pt]**

"Ieder groep van orde 24 heeft een transitieve actie op een verzameling van cardinaliteit 8."

Oplossing: Stel $|G| = 24$. $3|24$ en 3 is priem $\Rightarrow \exists g \in G$ van orde 3. De quotientverzaleming $G/\langle g\rangle$ heeft cardinaliteit 8, en heeft een transitieve actie van G.

Opgave 3 Wat is de definitie van een "p-Sylow deelgroep"? **[4pt]** [1pt]
Stel nu $p = 11$. Wat is de orde van een 11-Sylow deelgroep van de symmetrische groep S_{100}? [1pt]
Geef een voorbeeld van zo een 11-Sylow deelgroep. Is deze deelgroep abels? [1pt]
Zijn alle 11-Sylow deelgroepen van S_{100} abels (en waarom)? [1pt]

Oplossing: Een p-Sylow deelgroep is een deelgroep $S \subset G$ zodat $|S| = p^m$ en $p \not| \, |G| : |S|$. $|S_{100}| = 100! = 11 \cdot 22 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot$ (iets niet deelbaar door 11) $= 11^9 \cdot$ (iets niet deelbaar door 11). De orde van en 11-Sylow is dus 11^9. De groep $\langle (1, 2, \ldots, 11), (12, \ldots, 22), \ldots, (89, \ldots 99)\rangle \cong \mathbb{Z}_{11}^9$ is een 11-Sylow, en is abelsch. Alle p-Sylows zijn isomorf $\Rightarrow$ alle zijn abelsch.

Opgave 4 Wat is de definitie van een "semidirect product"? **[2pt]** [1pt]
Zij $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ een homomorfisme, en zij $H \rtimes G$ het bijhorende semidirecte product.
Laat zien dat als $H \rtimes G$ abels is, dan is φ triviaal. [1pt]

Oplossing: Als verzameling $H \rtimes G := H \times G$. De groep-vermenigvuldiging is $(h_1, g_1)(h_2, g_2) := (h_1\varphi(g_1)(h_2), g_1g_2)$. $H \rtimes G$ abelsch $\Rightarrow h_1\varphi(g_1)(h_2) = h_2\varphi(g_2)(h_1)\, \forall g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$. Stel $h_1 = e$. Dan $\varphi(g_1)(h_2) = h_2\, \forall g_1 \in G, h_2 \in H$. Dat is, $\varphi(g_1) = Id_H$. Dit voor ieder $g_1 \in G$, dus φ is triviaal.

Opgave 5 Zij $F_2 := \langle x, y\rangle$ de vrije groep met twee voortbrengers en zij $G := \langle x, y | (xy)^3\rangle$. **[3pt]**
Dan is $G = F_2/N$ voor een bepaalde deelgroep N.
Leg uit hoe N is gedefiniëerd. [1pt]
Laat zien dat $x^2yxyxyx^{-2}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} \in N$. [1pt]
Laat zien dat de twee voortbrengers x, y van G aan de relatie $yxy = x^{-1}y^{-1}x^{-1}$ voldoen. [1pt]

Oplossing: N is de deelgroep voortgebracht door alle elementen van de vorm $w(xy)^3w^{-1}$ voor $w \in F_2$. $x^2yxyxyx^{-2}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} = x(xy)^3x^{-1} \cdot (x^{-1}(xy)^3x)^{-1} \in N$. $yxy = x^{-1}y^{-1}x^{-1} \Leftrightarrow (x^{-1}y^{-1}x^{-1})^{-1}yxy = e$, maar $(x^{-1}y^{-1}x^{-1})^{-1}yxy = xyxyxy$ is in N en dus triviaal in G.

Opgave 6 Zij $p \neq q$ twee priemgetallen en G, H twee groepen zodanig dat $|G| = p^n$ en $|H| = q^m$. **[3pt]**
Bewijs dat $G \times H$ precies één p-Sylow deelgroep heeft.

Oplossing: $S := G \times \{e\}$ is p-Sylow in $G \times H$. De orde van $(g, h) \in G \times H$ is $ord(g)ord(h)$. De enige elementen waarvan de orde een p-macht is zijn dus de elementen van S. Ieder p-Sylow is een deelverzameling van S, en dus gelijk aan S.