Deeltentamen *Groepentheorie* (WISB221). A. Henriques, Nov 2012.

Geef niet alleen anwoorden, maar bewijs al je beweringen.

Opgave 1 Bepaal welke van de volgende beweringen juist zijn: [5pt]

$$\mathbb{Z}_5^\times \cong \mathbb{Z}_4, \qquad \mathbb{Z}_6^\times \cong \mathbb{Z}_5 \qquad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$$

$$(\mathbb{R}_{>0}, \times) \cong (\mathbb{R}, +) \qquad (\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{Q}, +)$$

Opgave 2 Bewijs dat als $g \in G$ een element uit een groep is, en als $h_1, h_2 \in G$ beide inversen van g zijn, dat dan $h_1 = h_2$. [3pt]

Opgave 3 Is $G := \{1, i, -1, -i\}$ een normale ondergroep van de quaternionengroep Q? [3pt]

Opgave 4 Zij $\pi \in S_n$ een 3-cykel, en $\sigma \in S_n$ en andere 3-cykel, en laat dan $G := \langle \pi, \sigma \rangle$. Bepaal welke van de volgende opties mogelijk zijn: [4pt]

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \qquad G \cong S_3 \qquad G \cong A_4 \qquad G \cong S_4$$

$$G \cong A_5 \qquad G \cong \mathbb{Z}_6 \qquad G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$$

Opgave 5 Geef een voorbeeld van een verzameling X met een binaire operatie $m : X \times X \to X$ zodat m niet commutatief is, en (X, m) aan alle axioma's van een groep voldoet behalve de existentie van inversen. [3pt]

Opgave 6 Zij $G := \mathrm{Isom}(C)$ de groep van symmetrieën van een kubus (niet alleen de oriëntatie behoudende symmetrieën). [6pt]

- Wat is de orde van G? [1pt]
- Hoeveel elementen van order 2 zijn er in G? en van orde 3? en van orde 4? [3pt]
- Zijn er ook elementen $g \in G$ met $ord(g) \notin \{1, 2, 3, 4\}$? [1pt]
- Hoeveel conjugatieklassen van elementen van orde 2 zijn er in G? [1pt]