Deeltentamen *Groepentheorie* (WISB221). A. Henriques, Nov 2012.
Geef niet alleen anwoorden, maar bewijs al je beweringen.

Opgave 1 Bepaal welke van de volgende beweringen juist zijn: [5pt]

$$\mathbb{Z}_5^\times \cong \mathbb{Z}_4, \qquad \mathbb{Z}_6^\times \cong \mathbb{Z}_5 \qquad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$$

$$(\mathbb{R}_{>0}, \times) \cong (\mathbb{R}, +) \qquad (\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{Q}, +)$$

Oplossing: • $\mathbb{Z}_5^\times \cong \mathbb{Z}_4$ is juist want $2 \in \mathbb{Z}_5^\times$ orde 4 heeft. • Fout: $|\mathbb{Z}_6^\times| = 2 \neq |\mathbb{Z}_5|$. • Fout: Er is geen element van orde 12 in $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$. • Juist: $x \mapsto e^x$ is een isomorfisme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$. • Fout: $\mathbb{Q}$ is niet cyclisch: voor ieder $x \in \mathbb{Q}$ geldt $\frac{1}{2}x \notin \langle x \rangle$.

Opgave 2 Bewijs dat als $g \in G$ een element uit een groep is, en als $h_1, h_2 \in G$ beide inversen van g zijn, dat dan $h_1 = h_2$. [3pt]

Oplossing: $h_1 = h_1 e = h_1(gh_2) = (h_1 g)h_2 = eh_2 = h_2$.

Opgave 3 Is $G := \{1, i, -1, -i\}$ een normale ondergroep van de quaternionengroep Q? [3pt]

Oplossing: Ja: $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{i, -i\}$ zijn conjugatieclassen.

Opgave 4 Zij $\pi \in S_n$ een 3-cykel, en $\sigma \in S_n$ en andere 3-cykel, en laat dan $G := \langle \pi, \sigma \rangle$. Bepaal welke van de volgende opties mogelijk zijn: [4pt]

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \qquad G \cong S_3 \qquad G \cong A_4 \qquad G \cong S_4$$

$$G \cong A_5 \qquad G \cong \mathbb{Z}_6 \qquad G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$$

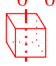
Oplossing: Stel $\pi = (a, b, c)$ en $\sigma = (x, y, z)$ met $a, b, c, x, y, z \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Als {a,b,c}={x,y,z}, dan $\langle \pi \rangle = \langle \sigma \rangle = \langle \pi, \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_3$. Als $\#\{a, b, c\} \cup \{x, y, z\} = 4$, dan $\langle \pi, \sigma \rangle \cong A_4$. Als $\#\{a, b, c\} \cup \{x, y, z\} = 5$, dan $\langle \pi, \sigma \rangle \cong A_5$. Als $\#\{a, b, c\} \cup \{x, y, z\} = 6$, dan commuteren π en σ, en $\langle \pi, \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. De anderen opties komen niet voort.

Opgave 5 Geef een voorbeeld van een verzameling X met een binaire operatie $m : X \times X \to X$ zodat m niet commutatief is, en (X, m) aan alle axioma's van een groep voldoet behalve de existentie van inversen. [3pt]

Oplossing: De verzameling van 2×2 matrices, met matrix vermenigvuldiging.

Opgave 6 Zij $G := \mathrm{Isom}(C)$ de groep van symmetrieën van een kubus (niet alleen de oriëntatie behoudende symmetrieën). [6pt]

- Wat is de orde van G? [1pt]
- Hoeveel elementen van order 2 zijn er in G? en van orde 3? en van orde 4? [3pt]
- Zijn er ook elementen $g \in G$ met $ord(g) \notin \{1, 2, 3, 4\}$? [1pt]
- Hoeveel conjugatieklassen van elementen van orde 2 zijn er in G? [1pt]

Oplossing: De elementen van order 2 zijn draiingen van 180°, spiegelingen langs vlakken, en de matrix $-\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Op conjugatie na, hebben we de volgende mogelijkheden: draaing met as  (3 zulke elementen), draaing met as  (6 zulke elementen), spiegeling langs en vlak  (3 zulke elementen), spiegeling langs en vlak  (6 zulke elementen), en $-\mathrm{Id}$ (1 element). Dit maakt 5 conjugatie classen, en een totaal van $3+6+3+6+1 = 19$ elementen van orde 2. De elementen van order 3 zijn draiingen van 120° en 240° rond en as dat door twee hoekpunten gaat. Er zijn 4 zulke assen, en dus 8 elementen van orde 3. De elementen van orde 4 zijn draaingen (6 elementen), en draaigen gecombineert met spieglingen (6 elementen): dus een totaal van 12 elementen. Er zijn ook elementen van orde 6, bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deeltentamen *Groepentheorie* (WISB221). A. Henriques, Jan 2013.

Geef niet alleen anwoorden, maar bewijs al je beweringen.

Opgave 1 Laat zien dat de enige groep waarvoor de conjugatie actie van G op zichzelf transitief is, de triviale groep is. **[2pt]**

Oplossing: $\{e\} \subset G$ is een baan van de actie. Als er maar één baan is, dan is $\{e\} = G$.

Opgave 2 Zij G een groep, en zij $H_1, H_2 < G$ twee deelgroepen. **[3pt]**

- Laat zien, door een voorbeeld te geven, dat H_1H_2 geen deelgroep van G hoeft te zijn. [1pt]
- Laat zien: als H_1 een normale deelgroep van G is, dan is H_1H_2 wel een deelgroep van G. [2pt]

Oplossing: • Neem $G = S_3$, $H_1 = \{e, (12)\}$ en $H_2 = \{e, (13)\}$. Dan is $H_1H_2 = \{e, (12), (13), (132)\}$, en dat is geen deelgroep omdat $(132)^2$ niet in zit. • Stel nu dat $H_1 \triangleleft G$. Dan is H_1H_2 wel gesloten onder vermenigvuldiging: voor $h_1, h_1' \in H_1$ en $h_2, h_2' \in H_2$, hebben we $h_1h_2h_1'h_2' = \underbrace{h_1(h_2h_1h_2^{-1})}_{\in H_1}\underbrace{h_2h_2'}_{\in H_2}$. Het bevat e, en het is gesloten onder het nemen van inversen: $(h_1h_2)^{-1} = h_2^{-1}h_1^{-1} = \underbrace{h_2^{-1}h_1^{-1}h_2}_{\in H_1}\underbrace{h_2^{-1}}_{\in H_2}$.

Opgave 3 Hoeveel elementen heeft de abelianisatie van de quaternionen groep Q? **[3pt]** [2pt]
Aan welke bekende groep is deze isomorf? [1pt]

Oplossing: De commutator deelgroep is $\{1, -1\}$, en $Q_{ab} = Q/\{1, -1\} = \{\{\pm 1\}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ omdat alle niet triviale elementen orde twee hebben.

Opgave 4 De dihedrale groep $D_4 = \{\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ werkt op de verzameling $X := \{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \,|\, a, b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\}$ door matrix vermenigvuldiging. **[3pt]**

$$X = \begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

- Hoeveel banen heeft deze actie? [1pt]
- Wat is de stabilizator van $(1, 1) \in X$? [1pt]
- Wat zijn de vaste punten van het element $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in D_4$? [1pt]

Oplossing: De actie heeft zes banen: de baan van $(0,0)$, de baan van $(0,1)$, de baan van $(0,2)$, de baan van $(1,1)$, de baan van $(1,2)$, en de baan van $(2,2)$. De stabilizator van $(1,1)$ is $\{e, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$. De vaste punten van $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ zijn de element van de vorm $(a, -a)$ voor $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Opgave 5 Zij G een groep van orde 100. **[2pt]**
Hoeveel 5-Sylow deelgroepen zijn er in G? [1pt]
Laat zien dat ieder 5-Sylow deelgroep normaal is in G. [1pt]

Oplossing: Er is een transitieve actie van G op de verzameling van 5-Sylow deelgroepen. Het aantal 5-Sylow deelgroepen is dus een deeler van 100. Het is dus in $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$. De enige deeler van 100 die gelijk is aan $1 \pmod 5$ is 1. Dus er is maar één 5-Sylow deelgroep. Het geconjugeerd van een 5-Sylow S is weer een 5-Sylow, dus $gSg^{-1} = S \ \forall g \in G$, dus $S \triangleleft G$.

Opgave 6 Laat zien dat de volgende groep niet cyclisch is: **[2pt]**

$$G = \langle x, y | x^2, y^2 \rangle$$

Oplossing: Er is een surjectieve homomorfisme f van G naar $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Als $g \in G$ een vortbrenger was, dan was $f(g) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ook een voortbrenger. Maar dat kan niet omdat $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ niet cyklis is.

Hertentamen *Groepentheorie* (WISB221). A. Henriques, Maart 2013.

Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

Opgave 1 Geef een voorbeeld van twee groepen G_1 en G_2 die allebei van orde 8 zijn, allebei niet abels zijn, maar niet isomorf aan elkaar zijn. Bewijs ook dat ze echt niet isomorf zijn. [3pt]

Oplossing: De dihedrale groep D_4, en de quaternionen groep Q. De dihedrale groep D_4 heeft twee elementen van orde 4; de quaternionen groep heeft zes elementen van orde 4.

Opgave 2 Zij $G := A_4$ de alternerende groep op 4 elementen. [3pt]

- Wat is de orde van G? [1pt]
- Hoeveel conjugatieklassen zijn er in G? Geef een lijst van alle conjugatieklassen. [1pt]
- Wat zijn alle normale deelgroepen van G? [1pt]

Oplossing: $|A_4| = \frac{1}{2}|S_4| = 12$. De conjugatie classen zijn $C_1 = \{e\}$, $C_2 = \{(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$, $C_3 = \{(1,2,3),(1,3,4),(1,4,2),(2,4,3)\}$, $C_4 = \{(1,3,2),(1,4,3),(1,2,4),(2,3,4)\}$. De enige verenigingen van conjugatie classen die goepen zijn zijn C_1, $C_1 \cup C_2$, en $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$.

Opgave 3 Zij G een eindige groep. [4pt]

Laat zien dat het enige homomorfisme van $\mathbb{Q}$ naar G het triviale homomorfisme is. [2pt]

Gebruik dit om te bewijzen dat de index van een deelgroep $H < \mathbb{Q}$ altijd oneindig is (behalve als $H = \mathbb{Q}$). [2pt]

Oplossing: Zij $f : \mathbb{Q} \to G$ een homomorfisme, en zij n de orde van G. Dan hebben we voor ieder $x \in \mathbb{Q}$: $f(x) = f(x/n + \ldots + x/n) = f(x/n)^n = e$ omdat $g^n = e\, \forall g \in G$. Als $H < \mathbb{Q}$ en deelgroep met eindig index was, dan zou $\mathbb{Q} \to G := \mathbb{Q}/H$ een niet triviale homomorfisme van $\mathbb{Q}$ naar een eindige groep zijn.

Opgave 4 De groep $GL(3,\mathbb{R})$ werkt op $\mathbb{R}^3$ door matrixvermenigvuldiging. [3pt]

- Hoeveel banen heeft deze actie? [1pt]
- Wat zijn de vaste punten van het element $\left(\begin{smallmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{smallmatrix}\right) \in GL(3,\mathbb{R})$? [1pt]
- Wat is de stabilizator van $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$? [1pt]

Oplossing: Twee banen: $\{0\}$ en de rest. De vaste punten zijn de veelvouden van $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$. De stabilizator van $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ is $\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{smallmatrix}\right) \in GL(3,\mathbb{R}) \,\middle|\, a+b=1, c+d=1, g+h=0\right\}$

Opgave 5 Zij S een 3-Sylow deelgroep van S_9. [4pt]

- Wat is de orde van S? [1pt]
- Geef twee elementen die een 3-Sylow deelgroep van S_9 voortbrengen. [2pt]

(als dat niet lukt: geef een verzameling die een 3-Sylow deelgroep van S_9 voortbrengt)

- Laat zien dat S_9 deelgroepen van orde $2 \cdot 3^4 = 162$ heeft. [1pt]

Oplossing: Een 3-Sylows van S_9 heeft orde 3^4, en voordt gegeven door $\langle (1,2,3), (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9) \rangle$. Door de permutatie $(1,4)(2,5)(3,6)$ toe te voegen krijg je een groep van orde $2 \cdot 3^4$.

Opgave 6 Zij G een groep en zij H het semidirecte product $G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$ voor de natuurlijke actie van $\mathrm{Aut}(G)$ op G. [3pt]
Laat zien dat er een natuurlijke actie van de groep H op de verzameling G is (geinduceerd door de links actie van G op G en de natuurlijke actie van $\mathrm{Aut}(G)$ op G).

Oplossing: Definieer $(g, \varphi) \cdot x := g\varphi(x)$. Dit is een actie want $(g, \varphi) \cdot ((h, \psi) \cdot x) = g\varphi(h\psi(x)) = g\varphi(h)\varphi(\psi(x)) = (g\varphi(h), \varphi \circ \psi)(x)$.