

Hertentamen *Groepentheorie* (WISB221).

A. Henriques, Maart 2012.

Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

Opgave 1 Wat is de definitie van een “normaal deelgroep”?

[3pt] [1pt]

Laat zien dat ieder deelgroep van \mathbb{Z} normaal is.

[1pt]

Geef een voorbeeld van een groep G met een deelgroep $H < G$ die niet normaal is.

[1pt]

Opgave 2 De groepen G_1, G_2, G_3, G_4 zijn gegeven door:

[3pt]

$$G_1 = (\mathbb{Z}, +) \quad G_2 = \langle a, b \mid aba^{-1} \rangle \quad G_3 = (\mathbb{Q}, +) \quad G_4 = (\mathbb{Q}_+, \times)$$

met \mathbb{Q}_+ de verzameling van positieve rationale getallen.

• Laat zien dat G_1 en G_2 isomorf zijn.

[1pt]

• Laat zien dat G_1 en G_3 niet isomorf zijn.

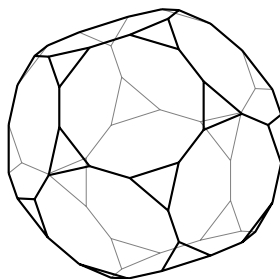
[1pt]

• Laat zien dat G_3 en G_4 niet isomorf zijn.

[1pt]

Opgave 3 Zij G de groep van orientatie behoudende symmetriën van de volgende figuur:

[4pt]



Zij X de verzameling van zijvlakken, en Y de verzameling van hoekpunten van deze figuur.

Is de actie van G op X transitief? Is deze actie vrij?

[2pt]

Is de actie van G op Y transitief? Is deze actie vrij?

[2pt]

Opgave 4 Hoeveel conjugatie klassen zijn er in de symmetrische groep S_6 ?

[4pt] [1pt]

Hoeveel elementen van S_6 zijn er die in dezelfde conjugatie klasse als $(1, 2)(3, 4, 5)$ zitten?

[1pt]

Hoeveel elementen van S_6 zijn er die met de permutatie $(1, 2)(3, 4, 5)$ commuteren?

[1pt]

Zij G een groep van orde n , en g een element uit G . Zij m het aantal elementen die met g commuteren.

Hoeveel elementen zijn er dan in de conjugatie klasse van g ?

[1pt]

Opgave 5 Zij A een eindig abelsch groep, en p een priem getal.

[2pt]

Hoeveel p -syLOW deelgroepen zijn er in A ?

[1pt]

Geef een voorbeeld van een 3-SyLOW deelgroep van de cyclische groep \mathbb{Z}_{216} .

[1pt]

Opgave 6 Zij $F_2 = \langle x, y \rangle$ de vrije groep op twee voortbrengers.

Laat zien dat de afbeelding

[2pt]

$$x \mapsto xyx, \quad y \mapsto xy$$

een automorfisme $F_2 \rightarrow F_2$ induceert.