**Hertentamen *Groepentheorie* (WISB221).** A. Henriques, Maart 2012.

Geef niet alleen anwoorden, maar bewijs al je beweringen.

---

**Opgave 1** Wat is de definitie van een "normaal deelgroep"? **[3pt]** [1pt]
Laat zien dat ieder deelgroep van $\mathbb{Z}$ normaal is. [1pt]
Geef een voorbeeld van een groep $G$ met een deelgroep $H < G$ die niet normaal is. [1pt]

**Oplossing:** Een deelgroep is normaal als hij en vereniging van conjugatie classen is. Alle conjugatie classen van $\mathbb{Z}$ bestaan uit één element, dus alle deelgroepen zijn normaal. $\langle(1,2)\rangle \not\trianglelefteq S_3$ want $(2,3)\langle(1,2)\rangle(2,3)^{-1} \neq \langle(1,2)\rangle$.

**Opgave 2** De groepen $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ zijn gegeven door: **[3pt]**

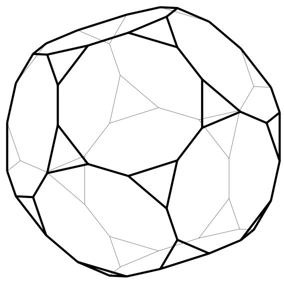
$$G_1 = (\mathbb{Z}, +) \qquad G_2 = \langle a, b \,|\, aba^{-1}\rangle \qquad G_3 = (\mathbb{Q}, +) \qquad G_4 = (\mathbb{Q}_+, \times)$$

met $\mathbb{Q}_+$ de verzameling van positieve rationele getallen.

- Laat zien dat $G_1$ en $G_2$ isomorf zijn. [1pt]
- Laat zien dat $G_1$ en $G_3$ niet isomorf zijn. [1pt]
- Laat zien dat $G_3$ en $G_4$ niet isomorf zijn. [1pt]

**Oplossing:** $G_2 \cong \langle a, b \,|\, b\rangle \cong \langle a \,|\, \rangle \cong \mathbb{Z}$. Als $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ en injective homomorfisme is, dan $\frac{1}{2}\varphi(1) \notin \mathrm{Im}(\varphi)$. $\forall g \in G_3, \exists y : y + y = x$ maar $\exists g \in G_4$, $\nexists y : y \times y = x$.

**Opgave 3** Zij $G$ de groep van orientatie behoudende symmetrieën van de volgende figuur: **[4pt]**



Zij $X$ de verzameling van zijvlakken, en $Y$ de verzameling van hoekpunten van deze figuur.
Is de actie van $G$ op $X$ transitief? Is deze actie vrij? [2pt]
Is de actie van $G$ op $Y$ transitief? Is deze actie vrij? [2pt]

**Oplossing:** De actie op $X$ is niet transitief (2 banen) en niet vrij (stabilizatoren zijn niet triviaal) De actie op $Y$ is transitief (één baan) en vrij (de cardinaliteit van de baan is gelijk aan de orde van de groep).

**Opgave 4** Hoeveel conjugatie classen zijn er in de symmetrische groep $S_6$? **[4pt]** [1pt]
Hoeveel elementen van $S_6$ zijn er die in dezelvde conjugatie classe als $(1,2)(3,4,5)$ zitten? [1pt]
Hoeveel elementen van $S_6$ zijn er die met de permutatie $(1,2)(3,4,5)$ commuteren? [1pt]

Zij $G$ een groep van orde $n$, en $g$ een element uit $G$. Zij $m$ het antaal elementen die met $g$ commuteren.
Hoeveel elementen zijn er dan in de conjugatie classe van $g$? [1pt]

**Oplossing:** De mogelijke cykel structuren zijn (1,1,1,1,1,1), (2,1,1,1,1), (2,2,1,1), (2,2,2), (3,1,1,1), (3,2,1), (3,3), (4,1,1), (4,2), (5,1), en (6), er zijn dus 11 conjugatie classen in $S_6$. De conjugatie classe van $(1,2)(3,4,5)$ heeft $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot 2 = 120$ elementen, en er zijn dus $6! : 120 = 6$ elementen die met $(1,2)(3,4,5)$ commuteren. Er zijn $n : m$ elementen in de conjugatie classe van $g$ omdat de conjugatie classe een baan is voor de conjugatie actie, en de stabilizator van $g$ orde $m$ heeft.

**Opgave 5** Zij $A$ een eindig abelsch groep, en $p$ een priem getal. **[2pt]**
Hoeveel $p$-sylow deelgroepen zijn er in $A$? [1pt]
Geef een voorbeeld van een 3-Sylow deelgroep van de cyclische groep $\mathbb{Z}_{216}$. [1pt]

**Oplossing:** Alle $p$-Sylows zijn aan elkaar geconjugeerd, dus gelijk aan elkaar omdat $A$ abelsch is. $216 = 27 \times 8$ dus $\mathbb{Z}_{27} < \mathbb{Z}_{216}$ is een 3-Sylow.

**Opgave 6** Zij $F_2 = \langle x, y \rangle$ de vrije groep op twee voortbrengers.
Laat zien dat de afbeelding **[2pt]**

$$x \mapsto xyx, \qquad y \mapsto xy$$

een automorfisme $F_2 \to F_2$ induceert.

**Oplossing:** De inverse afbeelding is $x \mapsto y^{-1}x$, $y \mapsto x^{-1}y^2$.