Tentamen groepentheorie

7 november 2016

An English translation follows after the Dutch version. Schrijf duidelijk je naam en studentnummer boven iedere pagina die je inlevert. Een rekenmachine, telefoon, boeken, aantekeningen of oude opgaves zijn niet toegestaan. Om je vragen te beantwoorden mag je gebruik maken van de resultaten (niet de opgaven) in 'Groups and Symmetry' van Armstrong, tenzij expliciet om een bepaald resultaat wordt gevraagd. Verder: een groep G heet enkelvoudig als de enige normale ondergroepen gegeven zijn door G en $\{e\}$ met $e \in G$ het eenheidselement.

Begin iedere hoofdopgave op een nieuw vel.

Totaal aantal punten: 90.

Opgave 1: Permutatiegroepen en diëdergroepen

1. (4pt) Zij $\sigma = (1\,2\,3\,\ldots\,100)$ een element van S_{100}. Schrijf σ^4 als product van disjuncte cykels.
2. (4pt) Is σ^3 een element van A_{100}? Motiveer je antwoord.
3. (4pt) Zij D_{37} de diëdergroep voortgebracht door elementen s en r met $s^2 = e, r^{37} = e$ en $srs = r^{-1}$. Bepaal alle elementen in de conjugatieklasse van s. Motiveer je antwoord.
4. (4pt) Bewijs dat D_{37} isomorf is met een ondergroep van D_k dan en slechts dan als 37 een deler is van k.

Opgave 2: Waar of niet waar?

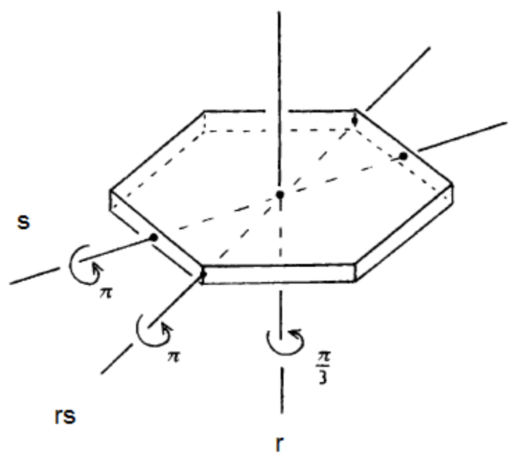
Bewijs of weerleg de volgende uitspraken.

1. (6pt) Zij G een groep. Zij $x, y \in G$ elementen van eindige orde. Dan heeft xy eindige orde.
2. (6pt) D_{100} bevat een ondergroep van index 3.
3. (6pt) Zij G een abelse groep. De conjugatieklassen van G bevatten allen precies 1 element.
4. (6pt) Zij $H \lhd G$. Dan is G isomorf met $G/H \times H$.
5. (6pt) Zij G een *abelse* groep en zij $H \lhd G$ de ondergroep van G bestaande uit alle elementen van eindige orde. Neem aan dat er een element $xH \in G/H$ is ongelijk aan eH (dus ongelijk aan de identiteit van G/H). Bewijs of weerleg nu: xH brengt een oneindige cyclische ondergroep van G/H voort.

6. (6pt) Zij G een groep met $|G| = 42$. Zij X een verzameling met $|X| = 15$. Er bestaat een werking van G op X die transitief is.
7. (6pt) Er bestaat een enkelvoudige groep van orde $3 \cdot 5 \cdot 59$.

Opgave 3: De telstelling

(16pt) Je wilt de zijvlakken van een plaat met als basis een regelmatige 6-hoek in 2 verschillende kleuren verven (zeg rood en blauw). Bepaal met behulp van de telstelling op hoeveel manieren je dit kunt doen. Twee kleuringen zijn hetzelfde als de ene door een draaiing van de plaat uit de andere verkregen kan worden. Je mag de volgende figuur uit Armstrong's boek gebruiken om je antwoord te motiveren. Je mag ook gebruiken dat de conjugatieklassen van $D_6 =< s, r >$ met $s^2 = e, r^6 = e, srs = r^{-1}$ gelijk zijn aan $\{e\}, \{r, r^5, \}, \{r^2, r^4\}, \{r^3\}, \{s, sr^2, sr^4\}, \{sr, sr^3, sr^5\}$. Formuleer expliciet de telstelling in je antwoord en laat zien hoe je die toepast. Motiveer ook hoe je aan de getallen in je berekening komt.



Opgave 4: Groepen onderscheiden

(8pt) De groepen D_∞ en $D_\infty \times D_\infty$ hebben beide oneindig veel elementen. Laat zien dat deze groepen echter niet isomorf zijn.

Opgave 5: Sylow stellingen

(8pt) Laat zien dat elke groep van orde $5^2 \times 17 \times 37$ abels is. Opmerking: In Armstrong is bewezen dat groepen van orde 25 isomorf zijn met $\mathbb{Z}_{25}$ of $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.

Group theory

November 7, 2016

See the first two pages for the Dutch version. Clearly write your name and student number above each page you hand in. A calculator, phone, books, notes, old exercises et cetera are not allowed. You may use the results (not the exercises) in Armstrong's book to answer the questions unless a result is explicitly asked for. Finally: recall that a group G is called simple if the only normal subgroups of G are $\{e\}$ and G itself.

Start every main exercise on a new sheet.

Total points: 90

Exercise 1: Permutation groups and dihedral groups

1. (4pt) Let $\sigma = (1\,2\,3\,\ldots\,100)$ be an element of S_{100}. Write σ^4 as a product of disjoint cykels.
2. (4pt) Is σ^3 an element of A_{100}? Motivate your answer.
3. (4pt) Let D_{37} be the dihedral group generated by the elements s and r with $s^2 = e, r^{37} = e$ and $srs = r^{-1}$. Determine all elements in the conjugacy class of s. Motivate your answer.
4. (4pt) Prove that D_{37} is isomorphic to a subgroup of D_k if and only if 37 divides k.

Exercise 2: True or false?

For each of the following statements: give a proof or a counterexample.

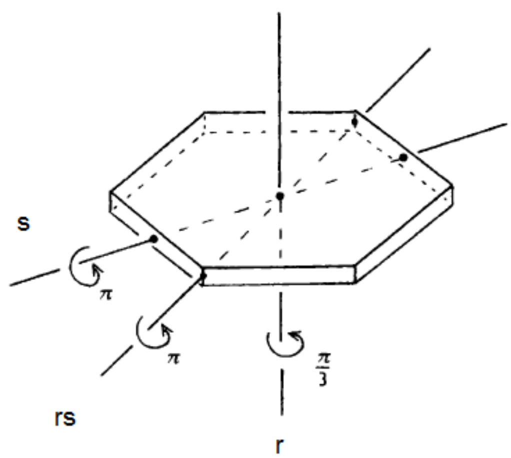
1. (6pt) Let G be a group. Let $x, y \in G$ be elements of finite order. Then xy has finite order.
2. (6pt) D_{100} contains a subgroup of index 3.
3. (6pt) Let G be an abelian group. The conjugacy classes of G contain only 1 element.
4. (6pt) Let $H \lhd G$. Then G is isomorphic to $G/H \times H$.
5. (6pt) Let G be an *abelian* group and let $H \lhd G$ be the subgroup of G consisting of all elements of finite order in G. Assume that there exists an element $xH \in G/H$ unequal to eH (i.e. unequal to the identity of G/H). Now prove or give a counterexample: xH generates an infinite cyclic subgroup of G/H.

6. (6pt) Let G be a group with $|G| = 42$. Let X be a set with $|X| = 15$. There exists an action of G on X which is transitive.

7. (6pt) There exists a simple group of order $3 \cdot 5 \cdot 59$.

Exercise 3: The counting theorem

(16pt) You want to color the faces of a plate with basis a regular hexagon in two colors (say red and blue). Use the counting theorem to find the number of possible paintings. Two paintings are equal if one can be obtained from the other through turning the plate. You may use the following figure from Armstrongs book to motivate your answer. You may also use that the conjugacy classes of $D_6 =< s, r >$ with $s^2 = e, r^6 = e, srs = r^{-1}$ are given by $\{e\}, \{r, r^5, \}, \{r^2, r^4\}, \{r^3\}, \{s, sr^2, sr^4\}, \{sr, sr^3, sr^5\}$. Explicitly formulate the counting theorem in your answer and show how it is applied. Also motivate how you obtain the numbers in your computation.



Exercise 4: Distinguishing groups

(8pt) The groups D_∞ and $D_\infty \times D_\infty$ are both infinite. Show however that these groups are not isomorphic.

Exercise 5: Sylow theorems

(8pt) Show that every group of order $5^2 \times 17 \times 37$ is abelian. Remark: In Armstrong we proved that groups of order 25 are isomorphic to either $\mathbb{Z}_{25}$ or $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.