Tentamen groepentheorie

2 januari 2017

An English translation follows after the Dutch version. Schrijf duidelijk je naam en studentnummer boven iedere pagina die je inlevert. Een rekenmachine, telefoon, boeken, aantekeningen of oude opgaves zijn niet toegestaan. Om je vragen te beantwoorden mag je gebruik maken van de resultaten (niet de opgaven) in 'Groups and Symmetry' van Armstrong, tenzij expliciet om een bepaald resultaat wordt gevraagd. Verder: een groep G heet enkelvoudig als de enige normale ondergroepen gegeven zijn door G en $\{e\}$ met $e \in G$ het eenheidselement. Je mag gebruiken dat $A_n, n \geq 5$ een enkelvoudige groep is (dit kan vooral nuttig zijn voor de bonusopgave).

Begin iedere hoofdopgave op een nieuw vel.

Totaal aantal punten: 90. Bonuspunten: 4.

Opgave 1: Permutatiegroepen en diëdergroepen

1. (4pt) Geef alle elementen van D_{10} van orde 2.
2. (4pt) Beschouw D_7 en zij $H < K < D_7$ ondergroepen zodanig dat $H \neq K$ en $K \neq D_7$. Laat zien dat H de triviale groep is, dat wil zeggen dat H maar 1 element bevat.
3. (4pt) Zij $\sigma_1 = (1\,2\,3\,4)$ en $\sigma_2 = (5\,6\,7\,8)$ elementen van S_8. Geef een element $\tau \in S_8$ zodat $\sigma_1 = \tau\sigma_2\tau^{-1}$.
4. (4pt) Zij $\sigma = (1\,2\,3\,\dots\,50)$ een element van S_{50}. Schrijf σ^{49} als product van disjuncte cykels.

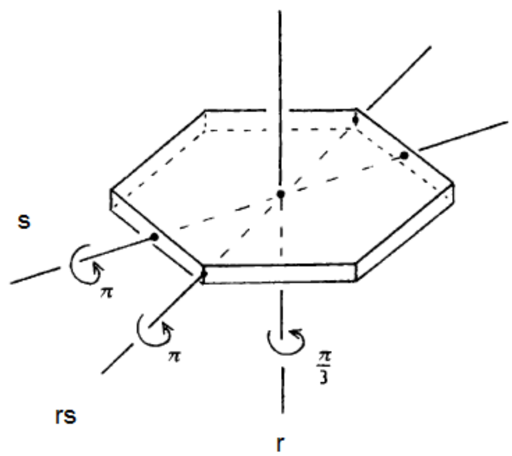
Opgave 2: Waar of niet waar?

Bewijs of weerleg de volgende uitspraken.

1. (6pt) Zij G een *abelse* groep. Zij $x, y \in G$ elementen van eindige orde. Dan heeft xy eindige orde.
2. (6pt) De groep $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$ is cyclisch.
3. (6pt) Er is een normale ondergroep H van D_{37} zodanig dat D_{37}/H isomorf is met $\mathbb{Z}_2$.
4. (6pt) Er is een normale ondergroep H van S_7 zodanig dat S_7/H isomorf is met $\mathbb{Z}_{11}$.
5. (6pt) Zij G een eindige groep die werkt op een verzameling X. Voor $g \in G$ zij $X^g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$. Dan is $|X^g|$ een deler van $|G|$.
6. (6pt) Beschouw de werking van GL_n op $X := GL_n$ door conjugatie. Dus $g(x) = gxg^{-1}, g \in GL_n, x \in X$. Dan heeft deze actie oneindig veel banen. Hint: Gebruik de determinant op een handige manier.
7. (6pt) Er bestaat een enkelvoudige groep van orde $7 \cdot 11 \cdot 137$.

Opgave 3: De telstelling

(16pt) Beschouw de plaat met als basis een regelmatige 6-hoek. Je wilt op de 6 zijvlakken aan de zijkant van deze plaat een pijl in het midden van dat zijvlak zetten die naar boven of naar beneden wijst (dus richting het bovenvlak of richting het ondervlak). Bepaal met behulp van de telstelling op hoeveel manieren je dit kunt doen. Twee pijlencombinaties zijn hetzelfde als de ene door een draaiing van de plaat uit de andere verkregen kan worden. Je mag de volgende figuur uit Armstrong's boek gebruiken om je antwoord te motiveren. Je mag ook gebruiken dat de conjugatieklassen van $D_6 =< s, r >$ met $s^2 = e, r^6 = e, srs = r^{-1}$ gelijk zijn aan $\{e\}, \{r, r^5, \}, \{r^2, r^4\}, \{r^3\}, \{s, sr^2, sr^4\}, \{sr, sr^3, sr^5\}$. Formuleer expliciet de telstelling in je antwoord en laat zien hoe je die toepast. Motiveer ook hoe je aan de getallen in je berekening komt.



Opgave 4: Groepen onderscheiden

(8pt) De groepen $D_2 \times D_3 \times \ldots \times D_7$ en $S_7 \times (\mathbb{Z}_2)^6$ hebben beide $2^6 \cdot (7!)$ elementen. Laat zien dat deze groepen echter niet isomorf zijn. Hier is per definitie $(\mathbb{Z}_2)^6 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Opgave 5: Slim homomorfismen tellen

Zij $n \geq 5$ en $k \geq 3$. Veronderstel dat k geen 3-voud is.

1. (4pt) Zij $\varphi : S_n \to D_k$ een homomorfisme. Bewijs dat A_n bevat is in de kern van φ. Hint: Wat kun je zeggen over het beeld van φ van een 3-cykel in S_n?

2. (4pt) Hoeveel homomorfismen $S_n \to D_k$ bestaan er? Opmerking: Het antwoord hangt af van k, maar niet van n.

3. (Bonus: 4pt) Zij nu $n \geq 5$ en $k \geq 3$ willekeurig, dus k mag ook een 3-voud zijn. Hoeveel homomorfismen $S_n \to D_k$ bestaan er?

Exam group theory

January 2, 2017

Een Nederlandse versie vind je hiervoor. Clearly write your name and student number above each page you hand in. A calculator, telephone, books, notes or old exercises are not allowed. To answer your questions you may use the results (not the exercises) in the book 'Groups and Symmetry' by Armstrong, unless a result is explicitly asked for. Further: a group G is called simple if the only normal subgroups of G are given by $\{e\}$ with $e \in G$ the identity element, and G itself. You may use that $A_n, n \geq 5$ is a simple group (this is mostly useful for the bonus exercise).

Start every main exercise on a new sheet.

Total number of points: 90. Bonus points: 4.

Exercise 1: Permutation groups and dihedral groups

1. (4pt) Give all elements of D_{10} of order 2.
2. (4pt) Consider D_7 and let $H < K < D_7$ be subgroups such that $H \neq K$ and $K \neq D_7$. Show that H is the trivial group, meaning that H contains only 1 element.
3. (4pt) Let $\sigma_1 = (1\,2\,3\,4)$ and $\sigma_2 = (5\,6\,7\,8)$ be elements of S_8. Give an element $\tau \in S_8$ such that $\sigma_1 = \tau\sigma_2\tau^{-1}$.
4. (4pt) Let $\sigma = (1\,2\,3\,\ldots\,50)$ be an element of S_{50}. Write σ^{49} as a product of disjoint cykels.

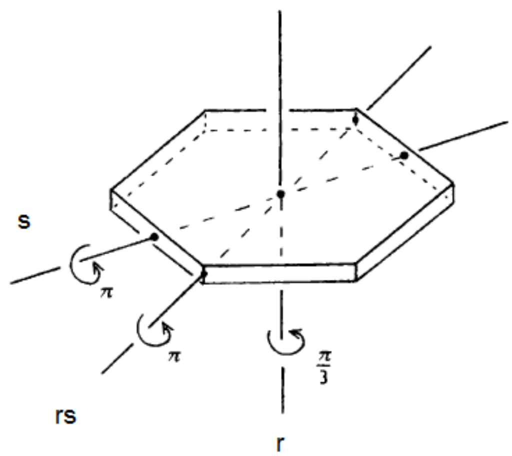
Exercise 2: True or false?

Prove or give a counterexample.

1. (6pt) Let G be an *abelian* group. Let $x, y \in G$ be elements of finite order. Then xy has finite order.
2. (6pt) The group $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$ is cyclic.
3. (6pt) There exists a normal subgroup H of D_{37} such that D_{37}/H is isomorphic to $\mathbb{Z}_2$.
4. (6pt) There exists a normal subgroup H of S_7 such that S_7/H is isomorphic to $\mathbb{Z}_{11}$.
5. (6pt) Let G be a finite group that acts on a set X. For $g \in G$ let $X^g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$. Then $|X^g|$ divides $|G|$.
6. (6pt) Consider the action of GL_n on $X := GL_n$ by conjugation. Thus $g(x) = gxg^{-1}, g \in GL_n, x \in X$. This action has infinitely many orbits. Hint: Use the determinant in a suitable way.
7. (6pt) There exists a simple group of order $7 \cdot 11 \cdot 137$.

Exercise 3: The counting theorem

(16pt) Consider the plate with basis a regular hexagon. You want to put an arrow on each of the 6 faces on the side of the plate. The arrow has to be put in the middle and points either upwards or downwards (i.e. in the direction of the top or bottom of the plate). Use the counting theorem to determine the number of possibilities. Two arrow configurations are the same if one can be obtained from the other by rotating the plate. You may use the following figure from Armstrong's book. You may also use that the conjugation classes of $D_6 =< s, r >$ with $s^2 = e, r^6 = e, srs = r^{-1}$ are given by $\{e\}, \{r, r^5, \}, \{r^2, r^4\}, \{r^3\}, \{s, sr^2, sr^4\}, \{sr, sr^3, sr^5\}$. Explicitly formulate the counting theorem in your answer and show how it is applied. Motivate the numbers that occur in your calculation.



Exercise 4: Distinguishing groups

(8pt) The groups $D_2 \times D_3 \times \ldots \times D_7$ and $S_7 \times (\mathbb{Z}_2)^6$ both have $2^6 \cdot (7!)$ elements. Show that these groups are however not isomorphic. Here we mean by definition $(\mathbb{Z}_2)^6 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Exercise 5: Counting homomorphisms

Let $n \geq 5$ and $k \geq 3$. Assume that k is not divisible by 3.

1. (4pt) Let $\varphi : S_n \to D_k$ be a homomorphism. Prove that A_n is contained in the kernel of φ. Hint: What can be said about the image under φ of a 3-cykel in S_n?
2. (4pt) How many homomorphisms $S_n \to D_k$ are there? Remark: The answer depends on k, but is independent of n.
3. (Bonus: 4pt) Now let $n \geq 5$ and $k \geq 3$ be arbitrary, so k may be divisible by 3. How many homomorphisms $S_n \to D_k$ are there?