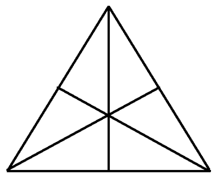
Tentamen groepentheorie 6-1-2017. Je mag resultaten uit het boek en de hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt het opnieuw te bewijzen. Opgaven uit de werkcolleges moet je wel opnieuw te bewijzen. Je mag voorgaande onderdelen van een opgave gebruiken zonder ze bewezen te hebben. Z.O.Z.!

Opgave 1.

(a) **1 punt** Bewijs dat $(123)(45) \in S_6$ een oneven permutatie is en bereken het aantal elementen in zijn conjugatieklasse.

(b) **1 punt** Beschouw $srsr^2 \in D_5$ en bepaal de unieke $0 \leq a < 5$ en $0 \leq b < 2$ waarvoor $srsr^2 = r^a s^b$. Bewijs voor alle $n \geq 3$ dat D_n als normale ondergroep van D_{2n} gerealiseerd kan worden.

(c) **1 punt** Bewijs dat er geen enkelvoudige groep van orde 350 bestaat.



Opgave 2.

(a) **1 punt** Decoreer elk zijvlak van een tetraëder door elk hoekpunt van dat zijvlak te verbinden met het middelpunt van de tegenoverliggende zijde (zie boven). Stel we hebben n kleuren en we verven elk van de zes kleine driehoekjes op elk zijvlak. Bewijs dat—op draaiingen na—precies $\frac{1}{12}(n^{24} + 3n^{12} + 8n^8)$ gedecoreerde tetraëders gemaakt kunnen worden.

(b) **1 punt** Stel G is een groep. Beschouw de afbeelding $\sigma : G \times G \to G$, $\sigma(g, h) = ghg^{-1}$. Bewijs dat dit een groepsactie van groep G op de verzameling $X = G$ is.

(c) **1 punt** Definieer voor elk element g in een groep G de *centralisator* van g als volgt: $C(g) = \{h \in G \mid gh = hg\}$. Bewijs dat $\sum_{\sigma \in S_5} |C(\sigma)| = 7 \cdot 5!$.

Z.O.Z.!

Opgave 3. Zij p een priemgetal en $n > 0$. Beschouw de groep $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ van $(n \times n)$-matrices A met coefficiënten in $\mathbb{Z}_p$ en $\det(A) \not\equiv 0 \mod p$. Zij $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ de ondergroep van matrices $A = (a_{ij})$ waarvoor $a_{ij} = 0$ voor alle $i > j$.

(a) **1 punt** Zij $H \subset G$ de deelverzameling van matrices $A = (a_{ij})$ waarvoor $a_{ii} = 1$ voor alle i. Laat zien dat $H \lhd G$ en $G/H \cong (\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})^n$. Hier is $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})^n = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \times \cdots \times \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ het n-voudig product en $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ wordt beschouwd als groep onder vermenigvuldiging modulo p. *Hint: Voor* $A = (a_{ij}) \in G$ *geldt dat* $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(b) **1 punt** Stel $n = 3$ en $p = 2$. Met welke groep uit de classificatie van groepen van orde 8 is H isomorf? Bewijs je antwoord. *Hint: De quaternionengroep* Q *heeft precies één element van orde 2.*

(c) **1 punt** Zij p priem en $n > 0$. Bewijs dat G slechts één Sylow p-ondergroep heeft.

Opgave 4. 1 punt Zij G een groep van orde $2p$ met p oneven priem. In deze opgave geef je een ander bewijs voor een stelling uit de colleges: als G niet abels is, dan $G \cong D_{2p}$.

- Stap 1: Laat zien dat een normale ondergroep $H \lhd G$ van orde p bestaat.
- Stap 2: Kies een voortbrenger r van H. Laat zien dat er een element $s \in G \setminus H$ van orde 2 bestaat zodanig dat $G = H \sqcup Hs$.
- Stap 3: vanwege Stap 1 weten we dat $srs^{-1} \in H$; gebruik dit om te laten zien dat $sr = r^{-1}s$. *Hint: Je mag gebruiken dat de enige oplossingen van de vergelijking* $x^2 \equiv 1 \mod p$ *gegeven worden door* $x \equiv \pm 1 \mod p$.

Woordenboek. Enkelvoudig=simple. Ondergroep=subgroup. Voorbrenger=generator.