Tentamen groepentheorie 5-11-2018. Je mag resultaten uit het boek en de hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt ze opnieuw te bewijzen. Opgaven uit de werkcolleges moet je wel opnieuw te bewijzen. Je mag voorgaande onderdelen van een opgave gebruiken zonder ze bewezen te hebben.

Begin elk van de vier opgaven op een nieuw vel!

Opgave 1.

(a) **1 punt** Bewijs dat $(123) \in A_5$ en dat het aantal 3-cykels in S_7 gelijk is aan 70.

(b) **1 punt** Bepaal de conjugatieklassen van $e, r, r^2, r^3 \in D_4$. Concludeer dat het centrum van D_4 ongelijk is aan $\{e\}$. Bewijs je antwoord.

(c) **1 punt** Stel G is een groep en $g \in G$. Bewijs dat g een *unieke* inverse heeft. Gebruik alleen de definitie van een groep en laat zorgvuldig zien hoe je die toepast.

Opgave 2.

(a) **1 punt** Geef de definities van: een groepsactie, een baan, een stabilisator.

(b) **1.5 punt** Decoreer elk hoekpunt van een kubus met één uit 3 kleuren. Bewijs dat er—op draaiingen na—precies 333 gedecoreerde kubussen gemaakt kunnen worden. *Hint: Je mag gebruiken dat:* $\frac{1}{24}(3^8 + 17 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^2) = 333$.

(c) **0.5 punt** Decoreer elk zijvlak van een octaëder met één uit 3 kleuren. Hoeveel gedecoreerde octaëders—op draaiingen na—kunnen gemaakt worden? Bewijs je antwoord.

Opgave 3.

(a) **1 punt** Zij G een groep van orde $p^m k$ waarbij p priem is, waarbij $m, k > 0$ en $\text{ggd}(p^m, k) = 1$. Stel dat $H \leq G$ orde p^m heeft. Bewijs: H is de enige ondergroep van orde p^m dan en slechts dan als $H \lhd G$.

(b) **1 punt** Zij $\phi : G \to G'$ een groepshomomorfisme tussen eindige groepen. Gegeven is dat $\text{ggd}(|G|, |G'|) = 1$. Bewijs dat de kern van ϕ gelijk is aan G. *Hint: Gebruik de eerste isomorfiestelling.*

(c) **1 punt** Zij G een groep van orde ab met $a, b > 0$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$. Stel dat $H \leq G$ orde a heeft. Bewijs: H is de enige ondergroep van orde a dan en slechts dan als $H \lhd G$. *Hint: Gebruik (b).*

Opgave 4. 1 punt Bewijs dat een groep G van orde 105 een ondergroep van orde 35 bevat. Deze ondergroep is cyclisch (Armstrong, 20.6); dit hoef je niet te bewijzen. Volg hierbij de volgende stappen:

- Stap 1: Bewijs dat G een unieke 5-Sylow *of* een unieke 7-Sylow ondergroep bevat.
- Stap 2: Bewijs in beide gevallen dat G een ondergroep van orde 35 bevat.

Woordenboek. Centrum=centre. Baan=orbit. Ondergroep=subgroup. Kern=kernel.

Opgave 1. (a) De permutatie $(123) = (13)(12)$ is even en zit dus in A_5. Een 3-cykel in S_7 kan op unieke manier geschreven worden als (abc) met $a, b, c \in \{1, \ldots, 7\}$ verschillend en $a < b$ en $a < c$. Er zijn $\binom{7}{3} \cdot 2 = 70$ zulke cykels: $\binom{7}{3}$ manieren om $\{a, b, c\}$ te kiezen en 2 omdat hieruit de 3-cykels $(abc), (acb)$ gevormd kunnen worden. (b) De conjugatieklasse van een element $h \in D_4$ is $[h] := \{ghg^{-1} : g \in D_4\}$. Dus $[e] := \{e\}$. Voorts $[r^a]$ bevat alle elementen van de vorm $r^b r^a r^{-b} = r^a$ en $r^b s r^a (r^b s)^{-1} = r^b s r^a s r^{-b} = r^b r^{-a} s^2 r^{-b} = r^{-a}$. Dus $[r] = [r^3] = \{r, r^3\}$, $[r^2] = \{r^2\}$. Het centrum is de vereniging van alle conjugatieklassen van grootte één en bevat dus e, r^2. (c) Stel x, y zijn inversen van g; d.w.z. $e = xg = gx = yg = gy$, waar $e \in G$ de eenheid is. Inversen bestaan vanwege de groepsaxioma's. Dan $y = y(gx)$, ofwel $y = (yg)x = ex = x$ (associativiteit, e eenheid).

Opgave 2. (a) Een actie van een groep G op een verzameling X is een afbeelding $\sigma : G \times X \to X$ zodanig dat $\sigma(g, \sigma(h, x)) = \sigma(gh, x)$ en $\sigma(e, x) = x$ voor alle $g, h \in G$ en $x \in X$. De baan van $x \in X$ is $O(x) = \{g(x) : g \in G\}$ (waar $g(x) := \sigma(g, x)$). De stabilisator van $x \in X$ is $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$. (b) Zij G de groep symmetrieën van een kubus en $r, s, t \in G$ zoals in het college/Armstrong. Dan $r^4 = e$, $s^3 = e$ en $t^2 = e$. Er zijn 3 symmetrieën van type r, 4 van type s en 6 van type t. Zij X de verzameling van alle 3^8 gedecoreerde kubussen. Gebruik Burnside's lemma. Bepaal fixloci: $|X^r| = |X^{r^3}| = 3^2$ (merk op: $r^3 = r^{-1}$), $|X^{r^2}| = 3^4$, $|X^s| = |X^{s^2}| = 3^4$ (merk op $s^2 = s^{-1}$), $|X^t| = 3^4$. Hier hoort een duidelijk plaatje (of beschrijving) bij! Antwoord: $\frac{1}{24}(3^8 + 17 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^2)$. (c) De octaëder is duaal aan de kubus: de middelpunten van de zijvlakken van de kubus corresponderen met de hoekpunten van een octaëder etc. (teken een plaatje). Je kunt (b) herhalen of opmerken dat de telling volledig analoog is door ieder hoekpunt van de kubus te associëren met het meest nabij gelegen zijvlak van de octaëder. Antwoord: 333.

Opgave 3. (a) Stel H is de enige ondergroep van orde p^m. Voor alle $g \in G$ is gHg^{-1} ook een ondergroep van orde p^m dus $gHg^{-1} = H$ en H is normaal. Stel $H \lhd G$ en $K \leq G$ heeft orde p^m. Dan is K een p-Sylow en dus is er een $g \in G$ zodanig dat $K = gHg^{-1}$ (Sylow II) en dus $K = H$ (H normaal). (b) Er geldt $G/\ker\phi \cong \operatorname{im}\phi$ (eerste isomorfiestelling). Stel $\ker\phi \neq G$. Dan is er een priemdeler p van $|G/\ker\phi| = |G|/|\ker\phi|$ (en dus van $|G|$) en p deelt $|\operatorname{im}\phi|$ en dus $|G'|$ (Lagrange). Tegenspaak met $\operatorname{ggd}(|G|, |G'|) = 1$. (c) Stel $H \leq G$ is de unieke ondergroep van orde a. Omdat gHg^{-1} ook een ondergroep is van orde a, voor alle $g \in G$, concluderen we dat $gHg^{-1} = H$ en dus $H \lhd G$. Stel $H \lhd G$ en $K \leq G$ heeft orde a. Beschouw $\psi : K \to G/H$, $x \mapsto xH$. Dit is een groepshomomorfisme en omdat $|G/H| = |G|/|H| = b$ concluderen we uit (b) dat $\ker\psi = K$, m.a.w. $K \subset H$ en dus $K = H$ (ze hebben allebei orde a).

Opgave 4. Stel G is een groep van orde $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Het aantal 5-Sylows α is $1, 6, 11, 16, 21, \ldots$ en deelt 21, i.e. is gelijk aan $1, 3, 7, 21$ dus $\alpha = 1$ of 21 (Sylow III). Het aantal 7-Sylows β is $1, 8, 15, \ldots$ en deelt 15, i.e. is gelijk aan $1, 3, 5, 15$ dus $\beta = 1$ of 15. Stel $\alpha = 21$ *en* $\beta = 15$. Zij $H_i \cong \mathbb{Z}_5$ de 5-Sylows en $K_j \cong \mathbb{Z}_7$ de 7-Sylows. Ieder element van $H_i \setminus \{e\}$ heeft orde 5 en is een voortbrenger. Ieder element van $K_j \setminus \{e\}$ heeft orde 7 en is een voortbrenger. Derhalve: elk tweetal uit $\{H_i, K_j : i = 1, \ldots, 21,\ j = 1, \ldots 15\}$ heeft alleen de eenheid gemeen. We hebben dus $21 \cdot 4 + 15 \cdot 6 = 174 > 105$ elementen in G; tegenspraak. Dus heeft G een unieke 5-Sylow H of unieke 7-Sylow K en die is normaal. In het eerste geval bekijk $\phi : G \to G/H$, dan heeft G/H orde $21 = 3 \cdot 7$ en bevat een 7-Sylow I (Sylow I). Dus $\phi^{-1}(I) \leq G$ heeft orde $5 \cdot 7 = 35$ (details niet vereist). In het tweede geval bekijk $\psi : G \to G/K$ en zij J een 5-Sylow in de groep G/K (van orde $15 = 3 \cdot 5$, Sylow I). Dan heeft $\psi^{-1}(J) \leq G$ eveneens orde $5 \cdot 7 = 35$.

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$ voor. $HK \leq G$ heeft orde 35