Hertentamen *Groepentheorie* (WISB221). A. Henriques, Maart 2013.

Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

Opgave 1 Geef een voorbeeld van twee groepen G_1 en G_2 die allebei van orde 8 zijn, allebei niet abels zijn, maar niet isomorf aan elkaar zijn. Bewijs ook dat ze echt niet isomorf zijn. **[3pt]**

Opgave 2 Zij $G := A_4$ de alternerende groep op 4 elementen. **[3pt]**
- Wat is de orde van G? [1pt]
- Hoeveel conjugatieklassen zijn er in G? Geef een lijst van alle conjugatieklassen. [1pt]
- Wat zijn alle normale deelgroepen van G? [1pt]

Opgave 3 Zij G een eindige groep. **[4pt]**
Laat zien dat het enige homomorfisme van $\mathbb{Q}$ naar G het triviale homomorfisme is. [2pt]
Gebruik dit om te bewijzen dat de index van een deelgroep $H < \mathbb{Q}$ altijd oneindig is (behalve als $H = \mathbb{Q}$). [2pt]

Opgave 4 De groep $GL(3, \mathbb{R})$ werkt op $\mathbb{R}^3$ door matrixvermenigvundiging. **[3pt]**
- Hoeveel banen heeft deze actie? [1pt]
- Wat zijn de vaste punten van het element $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R})$? [1pt]
- Wat is de stabilizator van $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$? [1pt]

Opgave 5 Zij S een 3-Sylow deelgroep van S_9. **[4pt]**
- Wat is de orde van S? [1pt]
- Geef twee elementen die een 3-Sylow deelgroep van S_9 voortbrengen. [2pt]

(als dat niet lukt: geef een verzameling die een 3-Sylow deelgroep van S_9 voortbrengt)
- Laat zien dat S_9 deelgroepen van orde $2 \cdot 3^4 = 162$ heeft. [1pt]

Opgave 6 Zij G een groep en zij H het semidirecte product $G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$ voor de natuurlijke actie van $\mathrm{Aut}(G)$ op G. **[3pt]**
Laat zien dat er een natuurlijke actie van de groep H op de verzameling G is (geinduceerd door de links actie van G op G en de natuurlijke actie van $\mathrm{Aut}(G)$ op G).