Hertentamen groepentheorie 11-1-2018. Je mag resultaten uit het boek en de hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt het opnieuw te bewijzen. Opgaven uit de werkcolleges moet je wel opnieuw te bewijzen. Je mag voorgaande onderdelen van een opgave gebruiken zonder ze bewezen te hebben. Z.O.Z.!

Opgave 1.

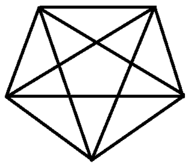
(a) **1 punt** Stel $P := (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$ en $\sigma = (134)(12) \in S_4$. Bepaal of

$$\sigma P := (x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)})$$

gelijk is aan P of $-P$. Leid hieruit af of σ even of oneven is.

(b) **1 punt** Bereken de conjugatieklasse van $s \in D_5$, d.w.z. schrijf alle elementen in deze conjugatieklasse in de vorm $r^a s^b$ met $0 \leq a < 5$ en $0 \leq b < 2$.

(c) **1 punt** Bewijs dat er geen enkelvoudige groep van orde 370 bestaat.



Opgave 2.

(a) **1 punt** Beschouw een pentagram, ingeschreven in een regelmatige 5-hoek, als object in $\mathbb{R}^3$. Een lijnstuk tussen twee van de vijf buitenste hoekpunten heet een *kant*; er zijn dus 10 kanten. Stel we hebben n kleuren en we decoreren het pentagram door ieder van de kanten één kleur te verven. Bewijs dat—op draaiingen in $\mathbb{R}^3$ na—precies $\frac{1}{10}(n^{10} + 5n^6 + 4n^2)$ gedecoreerde pentagrammen gemaakt kunnen worden.

(b) **1 punt** Geef de definitie van groepsactie.

(c) **1 punt** Gegeven een actie van een groep G op een verzameling X. Bewijs vanuit de definitie dat elementen in dezelfde baan geconjugeerde stabilisatoren hebben.

Z.O.Z.!

Opgave 3.

(a) **1 punt** Stel $n_1, \dots n_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat elk tweetal n_i, n_j grootste gemene deler 1 heeft. Laat zien dat de afbeelding

$$\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}, \quad x \mapsto (x \pmod{n_1}, \dots, x \pmod{n_k})$$

een groepshomomorfisme is, waar $x \pmod{n_i}$ de restklasse van x modulo n_i aanduidt (alle groepen worden gezien als groep onder optelling). Bewijs dat

$$\ker \phi = \Big\{ x \in \mathbb{Z} \,:\, x \text{ is deelbaar door } n_1 \cdots n_k \Big\},$$

waar $\ker \phi$ de kern van ϕ aanduidt. *Hint: Je mag gebruiken, zonder bewijs, dat* $x + y \pmod{n_i} = x \pmod{n_i} + y \pmod{n_i}$.

(b) **1 punt** Gebruik (a) om te bewijzen dat

$$\mathbb{Z}_{n_1 \cdots n_k} \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$$

voor all $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat elk tweetal n_i, n_j grootste gemene deler 1 heeft. *Hint: Hoeveel elementen bevatten het beeld* $\operatorname{im} \phi$ *en* $\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$*?*

(c) **1 punt** Herinner uit de colleges dat de quaternionengroep $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ bepaald wordt door de relaties

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k.$$

Bewijs dat er een normale ondergroep $N \lhd Q$ bestaat zodanig dat $N \cong \mathbb{Z}_2$. Met welke groep van orde 4 (uit de classificatie) is Q/N isomorf?

Opgave 4.

(a) **0.5 punt** Stel G is een groep en $H \lhd G$ en $K \lhd G$ zijn normale ondergroepen. Stel $HK = G$ en $H \cap K = \{e\}$. Bewijs dat $G \cong H \times K$. *Hint: Volgens een stelling uit het boek is het voldoende om te laten zien dat* $hk = kh$ *voor alle* $h \in H$ *en* $k \in K$. *Beschouw* $hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1})$.

(b) **0.5 punt** Bewijs dat elke groep van orde 15 isomorf is met $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

Woordenboek. Enkelvoudig=simple. Baan=orbit. Restklasse=residue class. Ondergroep=subgroup.