Hertentamen groepentheorie 11-1-2018. Je mag resultaten uit het boek en de hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt het opnieuw te bewijzen. Opgaven uit de werkcolleges moet je wel opnieuw te bewijzen. Je mag voorgaande onderdelen van een opgave gebruiken zonder ze bewezen te hebben. Z.O.Z.!

Opgave 1.

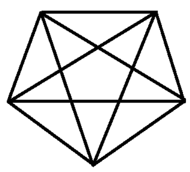
(a) **1 punt** Stel $P := (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$ en $\sigma = (134)(12) \in S_4$. Bepaal of

$$\sigma P := (x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)})$$

gelijk is aan P of $-P$. Leid hieruit af of σ even of oneven is.

(b) **1 punt** Bereken de conjugatieklasse van $s \in D_5$, d.w.z. schrijf alle elementen in deze conjugatieklasse in de vorm $r^a s^b$ met $0 \leq a < 5$ en $0 \leq b < 2$.

(c) **1 punt** Bewijs dat er geen enkelvoudige groep van orde 370 bestaat.



Opgave 2.

(a) **1 punt** Beschouw een pentagram, ingeschreven in een regelmatige 5-hoek, als object in $\mathbb{R}^3$. Een lijnstuk tussen twee van de vijf buitenste hoekpunten heet een *kant*; er zijn dus 10 kanten. Stel we hebben n kleuren en we decoreren het pentagram door ieder van de kanten één kleur te verven. Bewijs dat—op draaiingen in $\mathbb{R}^3$ na—precies $\frac{1}{10}(n^{10} + 5n^6 + 4n^2)$ gedecoreerde pentagrammen gemaakt kunnen worden.

(b) **1 punt** Geef de definitie van groepsactie.

(c) **1 punt** Gegeven een actie van een groep G op een verzameling X. Bewijs vanuit de definitie dat elementen in dezelfde baan geconjugeerde stabilisatoren hebben.

Z.O.Z.!

Opgave 3.

(a) **1 punt** Stel $n_1, \dots n_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat elk tweetal n_i, n_j grootste gemene deler 1 heeft. Laat zien dat de afbeelding

$$\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}, \quad x \mapsto (x \,(\operatorname{mod} n_1), \dots, x \,(\operatorname{mod} n_k))$$

een groepshomomorfisme is, waar $x \,(\operatorname{mod} n_i)$ de restklasse van x modulo n_i aanduidt (alle groepen worden gezien als groep onder optelling). Bewijs dat

$$\ker \phi = \Big\{ x \in \mathbb{Z} \,:\, x \text{ is deelbaar door } n_1 \cdots n_k \Big\},$$

waar $\ker \phi$ de kern van ϕ aanduidt. *Hint: Je mag gebruiken, zonder bewijs, dat* $x + y \,(\operatorname{mod} n_i) = x \,(\operatorname{mod} n_i) + y \,(\operatorname{mod} n_i)$.

(b) **1 punt** Gebruik (a) om te bewijzen dat

$$\mathbb{Z}_{n_1 \cdots n_k} \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$$

voor all $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat elk tweetal n_i, n_j grootste gemene deler 1 heeft. *Hint: Hoeveel elementen bevatten het beeld* $\operatorname{im} \phi$ *en* $\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$*?*

(c) **1 punt** Herinner uit de colleges dat de quaternionengroep $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ bepaald wordt door de relaties

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k.$$

Bewijs dat er een normale ondergroep $N \lhd Q$ bestaat zodanig dat $N \cong \mathbb{Z}_2$. Met welke groep van orde 4 (uit de classificatie) is Q/N isomorf?

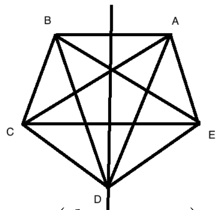
Opgave 4.

(a) **0.5 punt** Stel G is een groep en $H \lhd G$ en $K \lhd G$ zijn normale ondergroepen. Stel $HK = G$ en $H \cap K = \{e\}$. Bewijs dat $G \cong H \times K$. *Hint: Volgens een stelling uit het boek is het voldoende om te laten zien dat* $hk = kh$ *voor alle* $h \in H$ *en* $k \in K$. *Beschouw* $hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1})$.

(b) **0.5 punt** Bewijs dat elke groep van orde 15 isomorf is met $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

Woordenboek. Enkelvoudig=simple. Baan=orbit. Restklasse=residue class. Ondergroep=subgroup.

Opgave 1. (a) Uitschrijven geeft $\sigma P = (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_1)(x_3 - x_4)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) = -P$ dus σ is oneven. (b) De conjugatieklasse van s is $[s] := \{gsg^{-1} : g \in D_5\}$. We hebben: $r^a s r^{-a} = r^{2a}s$ en $(r^a s)s(r^a s)^{-1} = r^a s r^{-a} = r^{2a}s$. Derhalve $[s] = \{s, rs, r^2s, r^3s, r^4s\}$. (c) Stel G is enkelvoudig van orde $370 = 2 \cdot 5 \cdot 37$. Dan heeft G een 37-Sylow (Sylow I) en het aantal 37-Sylows is $1, 38, 75, \ldots$ en deelt $2 \cdot 5$ (Sylow III). Dus is er een unieke 37-Sylow en die is derhalve normaal; tegenspraak.



Opgave 2. (a) Zij $G = D_5$ de groep (draaiings)symmetrieën van het pentagram. Zij X de collectie van alle n^{10} mogelijke decoraties. Dan werkt G op X door de symmetrie toe te passen. Stel r is een draaiing over $\frac{2\pi}{5}$. Het aantal elementen van X^r is $n \cdot n$ (n mogelijkheden voor de buitenste rand en n voor de overige 5 kanten. Dezelfde telling geldt voor r^2 —teken een plaatje—. Evenzo voor $r^3 = r^{-2}$ en $r^4 = r^{-1}$. Zij s draaiing over π (in $\mathbb{R}^3$) rond de as in bovenstaande figuur. Een gedecoreerde pentagram zit in X^s precies dan als de elementen van de paren (AE, BC), (DE, CD), (AD, BD), (AC, BE) dezelfde kleur hebben. En dus zijn er $n^4 \cdot n^2$ zulke pentagrammen (de laatste n^2 komt van de vrije keuze voor AB en CE). Dezelfde telling geldt voor rs, r^2s, r^3s, r^4s. De telstelling geeft $\frac{1}{10}(n^{10} + 4n^2 + 5n^6)$. (b) Een actie van een groep G op een verzameling X is een afbeelding $\sigma : G \times X \to X$ zodanig dat $\sigma(e, x) = x$ en $\sigma(g, \sigma(h, x)) = \sigma(gh, x)$ voor alle $g, h \in G$ en $x \in X$. Of geef de equivalente definitie van Armstrong. (c) Stel $y \in O(x)$ dan $y = g(x)$. Stel $h \in G_y$, dan $h(y) = y = g(x) = hg(x)$ dus $ghg^{-1}(x) = x$ dus $gG_yg^{-1} \subset G_x$. Een soortgelijke redenering geeft $g^{-1}G_xg \subset G_y$ ofwel $G_x = gG_yg^{-1}$.

Opgave 3. (a) We hebben $\phi(x+y) = (x+y \pmod{n_1}, \ldots, x+y \pmod{n_k}) = (x \pmod{n_1} + y \pmod{n_1}, \ldots, x \pmod{n_k} + y \pmod{n_k}) = \phi(x) + \phi(y)$ voor alle $x, y \in \mathbb{Z}$ (hint). Een element $x \in \mathbb{Z}$ zit in de kern precies dan als $x = 0 \bmod n_i$ voor alle i. Dit is equivalent met $x = 0 \bmod n_1 \cdots n_k$ omdat $n_1, \ldots, n_k$ paarsgewijs grootste gemene deler 1 hebben. (b) De eerste homomorfiestelling toepassen geeft $\mathbb{Z}/\ker\phi \cong \mathbb{Z}/(n_1 \cdots n_k)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{n_1 \cdots n_k} \cong \operatorname{im}\phi$. Dus $\operatorname{im}\phi$ heeft dus $n_1 \cdots n_k$ elementen, maar hetzelfde geldt voor $\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ en dus $\operatorname{im}\phi = \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ en we zijn klaar. (c) Neem $N := \langle -1 \rangle = \{-1, 1\}$ dan $G \cong \mathbb{Z}_2$. Voorts laten we zien dat $ghg^{-1} \in \{-1, 1\}$ voor $g = \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ en $h = \pm 1$. De enige niet-triviale gevallen zijn $(-1)^3 = -1$, $i(-1)i^{-1} = i(-1)(-i) = i^2 = -1$, $(-i)(-1)(-i)^{-1} = i^2 = -1$ en evenzo voor $\pm j, \pm k$. Derhalve is N normaal en is $Q/N = \{N, iN, jN, kN\}$ een groep van orde 4. Voort $(iN)^2 = (-1)N = N$ en evenzo voor jN, kN en dus hebben alle elementen van Q/N orde ≤ 2 en $Q/N \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Opgave 4. Voor alle $h \in H$ en $k \in K$ hebben we $h(kh^{-1}k^{-1}) \in H$ want $h, h^{-1}, kh^{-1}k^{-1} \in H$ (H normaal) en $(hkh^{-1})k^{-1} \in K$ want $k, k^{-1}, hkh^{-1} \in K$ (K normaal). Dus $hkh^{-1}k^{-1} = e$, ofwel $hk = kh$. De hint geeft het resultaat. (b) Stel G heeft orde 15. Vanwege Sylow I is er een 3-Sylow $\mathbb{Z}_3 \cong H \leq G$ en een 5-Sylow $\mathbb{Z}_5 \cong K \leq G$. Vanwege Sylow III is het aantal 3-Sylows een deler van 5 en $1 \pmod 3$, ofwel 1. Het aantal 5-Sylows is een deler van 3 en $1 \pmod 5$, ofwel 1. En dus zijn G, H normaal. Voorts hebben we $H \cap K = \{e\}$ want een element $g \neq e$ in de doorsnede zou orde 3 en 5 moeten hebben (Lagrange); tegenspraak. Zij $H = \{e, h, h^2\}$, dan $G = K \sqcup hK \sqcup h^2K$ ($H \cap K = \{e\}$ en $|G| = 15$) en dus $G = HK$ en het resultaat volgt uit (a).