Tentamen groepentheorie 7-11-2019. Je mag resultaten uit het boek en de hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt ze opnieuw te bewijzen. Opgaven uit de werkcolleges moet je wel opnieuw te bewijzen. Je mag voorgaande onderdelen van een opgave gebruiken zonder ze bewezen te hebben.

Opgave 1.

(a) **1 punt** Hoeveel conjugatieklassen heeft S_5? Bewijs je antwoord.

(b) **1 punt** Gegeven: de dicyclische groep Dic_3 heeft orde 12 en wordt voortgebracht door twee elementen r, s die voldoen aan $r^6 = 1$, $s^2 = r^3$ en $s^{-1}rs = r^{-1}$. Bewijs: er bestaat een normale ondergroep $H \lhd \mathrm{Dic}_3$ zodanig dat $\mathrm{Dic}_3/H \cong \mathbb{Z}_2$.

(c) **1 punt** Zij G een abelse groep en H de deelverzameling van alle elementen in G met eindige orde. Bewijs dat H een ondergroep van G is.

Opgave 2.

(a) **1 punt** Bewijs dat D_3 isomorf is met een ondergroep $H \leq S_6$ zodanig dat H voorgebracht wordt door een even en een oneven permutatie. *Hint: Cayley.*

(b) **1 punt** Geef de definitie van een baan en stabilisator, en formuleer de baan-stabilisatorstelling.

(c) **1 punt** Beschouw een regelmatige zeshoek in $\mathbb{R}^2$. Stel we hebben n kleuren tot onze beschikking en we decoreren de zeshoek door elk van de zes kanten (d.w.z. zijden) een kleur te geven. Beschouw twee zulke gedecoreerde zeshoeken als equivalent wanneer ze op *draaiing of spiegeling* in $\mathbb{R}^2$ na hetzelfde zijn. Bewijs dat er, op symmetrie na, $\frac{1}{12}(n^6+3n^4+4n^3+2n^2+2n)$ zulke gedecoreerde zeshoeken zijn.

Opgave 3.

(a) **1 punt** Beschouw $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ als groepen onder vermenigvuldiging. Zijn deze groepen isomorf? Bewijs je antwoord.

(b) **1 punt** Bewijs dat er geen enkelvoudige groep van orde 351 bestaat.

(c) **1 punt** Zij G een groep. Een *automorfisme* van G is een groepsisomorfisme $\phi : G \to G$. De verzameling $\mathrm{Aut}(G)$ van automorfismen van G vormt een groep onder samenstelling (gegeven). Stel $g \in G$, dan is $G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ een automorfisme van G (gegeven) en zulke automorfismen van G heten *inwendige automorfismen* van G. Bewijs dat de verzameling $\mathrm{Inn}(G)$ van inwendige automorfismen van G een normale ondergroep van $\mathrm{Aut}(G)$ is. Bewijs voorts dat $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$, waar $Z(G)$ het centrum van G is.

Opgave 4. 1 punt De quasi-diëdergroep van orde 16 is een groep G met twee voortbrengers r, s die voldoen aan de relaties $r^8 = s^2 = 1$ en $rs = sr^3$; i.h.b. heeft r orde 8 en s orde 2 (gegeven). Bewijs dat $\langle r^4 \rangle \lhd G$ en $G/\langle r^4 \rangle \cong D_4$. *Hint: De quaternionengroep heeft slechts 1 element van orde 2.*

Woordenboek. Dicyclische groep=dicyclic group, ondergroep=subgroup, voortgebracht=generated, baan=orbit, enkelvoudig=simple, centrum=centre.