Hertentamen Groepentheorie antwoorden

Opgave 1. (a) Gebuik de identiteiten: $(abc) = (ac)(ab)$ en $(ab) = (1a)(1b)(1a)$. Dan $(234) = (24)(23) = (12)(14)(12)(12)(13)(12)$. (b) Stel G is een enkelvoudige groep van orde 215. Priemfactorisatie: $215 = 5 \cdot 43$. Het aantal 5-Sylows in G deelt 43 en $\equiv 1 \mod 5$ (Sylow III). Aangezien $53 \not\equiv 1 \mod 5$ is er een unieke 5-Sylow H. Derhalve $gHg^{-1} = H$ voor alle $g \in G$, want elke gHg^{-1} is een ondergroep van G van orde 5. Dus H is normaal; tegenspraak. (c) Stel $g \in G$ en $g \neq e$. Dan: $g^2 = e$ (i.e. g heeft orde 2) d.e.s.d.a. $g = g^{-1}$. De elementen van $G \setminus \{e\}$ van orde > 2 komen dus in paren. Derhalve $0 \equiv |G| \equiv 1 + |\{\text{elementen van orde } 2\}| \mod 2$.

Opgave 2. (a) Label $1 = (0,0)$, $2 = (1,0)$, $3 = (0,1)$, $4 = (1,1)$. Cayley geeft dat de gewenste ondergroep gegeven wordt door $\{L_{(0,0)}, L_{(1,0)}, L_{(0,1)}, L_{(1,1)}\} \leq S_4$, waar $L_g : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ linkstranslatie aanduidt. Derhalve $L_{(0,0)} = e$, $L_{(1,0)} = (12)(34)$, $L_{(0,1)} = (13)(24)$, $L_{(1,1)} = (14)(23)$. (b) Zij s spiegeling in de horizontale lijn. De symmetriegroep van de ongedecoreerde tegel uit de figuur is $G = \{e, r^2, s, r^2 s\} \leq D_4$. Zij X de collectie van alle n^6 gedecoreerde tegels (zonder symmetrie). De groep G werkt op X door toepassing van de symmetrie. Bepaal fixloci: $|X^e| = n^6$, $|X^{r^2}| = n^3$, $|X^s| = n^3$ en $|X^{r^2 s}| = n^4$. Illustreer dit aan de hand van een duidelijke beschrijving of plaatjes! De telstelling geeft het antwoord. (c) Voor een commutator $xyx^{-1}y^{-1}$ en $g \in G$ geldt dat $gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gx^{-1}g^{-1})(gy^{-1}g^{-1}) = (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gxg^{-1})^{-1}(gyg^{-1})^{-1}$ is een commutator. Een inverse van een commutator is een commutator dus een willekeurig element van $[G, G]$ is van de vorm $c_1 \cdots c_n$ met c_i commutatoren. Derhalve $gc_1 \cdots c_n g^{-1} = (gc_1 g^{-1}) \cdots (gc_n g^{-1})$ is een product van commutatoren. Voor alle $x[G,G], y[G,G] \in G/[G,G]$ hebben we dat $xy[G,G] = yx[G,G]$ want $(yx)^{-1}(xy) = x^{-1}y^{-1}xy \in [G,G]$.

Opgave 3. (a) De afbeelding $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = e^x$ is een bijectie met inverse $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$ (geen bewijs nodig). Voorts $f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$ dus beide groepen zijn isomorf. (b) Ten eerste is iedere $L_g : X \to X$ een permutatie. Stel $L_g(g_i H) = (gg_i)H = L_g(g_j H) = (gg_j H)$ dan $g_i H = g_j H$ (vermenigvuldig met g^{-1}). Voorts $g_i H = g(g^{-1}g_i)H = L_g((g^{-1}g_i)H)$. Ten tweede is de afbeelding $\phi : g \mapsto L_g$ een groepshomorfisme: $\phi(gh)(g_i H) = L_{gh}(g_i H) = (ghg_i)H$ alsook $\phi(g)(\phi(h)(g_i H)) = \phi(g)((hg_i)H) = (ghg_i)H$. Ten derde $\ker \phi$ is automatisch een (normale) ondergroep van G en als $g \in \ker \phi$, dan $L_g(H) = gH = H$ ofwel $g \in H$. (c) Beschouw de afbeelding $\phi : G \to S_n$ van (b). Vanwege de eerste isomorfiestelling, $\ker \phi \lhd G$. Als $\ker \phi = H = G$, dan $n = 1$ (tegenspraak). Dus $\ker \phi = \{e\}$ (G is enkelvoudig) en G is isomorf met een ondergroep van S_n. Derhalve $|G|$ deelt $n!$ (Lagrange).

Opgave 4. Stel G is een enkelvoudige groep van orde $216 = 2^3 3^3$. Het aantal 3-Sylows is een deler van 8 (d.w.z. $1, 2, 4, 8$) en $\equiv 1 \mod 3$, dus 1 of 4. De eerste mogelijkheid is uitgesloten want G is enkelvoudig en een unieke 3-Sylow zou een normale ondergroep zijn. Stel $X = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ is de collectie 3-Sylows. Definieer een actie van G op X gegeven door $H_i \mapsto gH_i g^{-1}$ ($gH_i g^{-1}$ is duidelijk een 3-Sylow en dit is een actie want $eH_i e^{-1} = H_i$ en $g(hH_i h^{-1})g^{-1} = (gh)H_i(gh)^{-1}$). Deze actie geeft een groepshomorfisme $\phi : G \to S_4$ (door te labelen $i = H_i$). Aangezien $\ker \phi \lhd G$ (eerste isomorfiestelling) en $\ker \phi \neq G$ (anders is elke H_i normaal; uitgesloten want G enkelvoudig), concluderen we $\ker \phi = \{e\}$ (G enkelvoudig). Conclusie: $216 \leq 4! = 24$ tegenspraak.