Opgave 1. (a) De conjugatieklassen van S_5 staan in bijectief verband met de partities van 5. Dit zijn $5 = 5$, $5 = 4 + 1$, $5 = 3 + 2$, $5 = 3 + 1 + 1$, $5 = 2 + 2 + 1$, $5 = 2 + 1 + 1 + 1$, $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Antwoord: 7. (b) Beschouw $\langle r\rangle \leq \mathrm{Dic}_3$. Dan $\langle r\rangle = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ (relaties en orde 12; geen aftrek als $\mathrm{ord}(r) = 6$ niet bewezen wordt) en de index van $\langle r\rangle$ in Dic_3 is dus 2. Vanwege een stelling uit het boek $\langle r\rangle \lhd \mathrm{Dic}_3$ en $\mathrm{Dic}_3/\langle r\rangle \cong \mathbb{Z}_2$. (c) De eenheid heeft orde 1 dus $1 \in H$. Als $x, y \in G$ eindige orde m, n hebben, dan $(xy)^{mn} = x^{mn}y^{mn}$ (G abels) en dus $(xy)^{mn} = 1$ en xy heeft eindige orde. Voorts $(x^{-1})^m = (x^m)^{-1} = 1$, dus x^{-1} heeft eindige orde.

Opgave 2. (a) Vanwege de stelling van Cayley: $D_3 \cong H := \{L_1, L_r, L_{r^2}, L_s, L_{rs}, L_{r^2s}\} \leq S_6$, waar $L_g : D_3 \to D_3$ gegeven wordt door linksvermenigvuldigen met x. Label $1 = 1, 2 = r, 3 = r^2, 4 = s, 5 = rs, 6 = r^2s$. De standaardrekenregels voor diëdergroepen geven $L_r = (123)(456)$ (een even permutatie) en $L_s = (14)(26)(35)$ (een oneven permutatie). Omdat r, s D_3 voortbrengen, concluderen we dat H voortgebracht wordt door een even en oneven permutatie. Alternatief: neem $H = \langle(12), (123)\rangle \leq S_6$. Dan wordt H voortgebracht door een even en oneven permutatie en $H \cong S_3$ (evident). Vanwege de classificatie van groepen van orde 6 weten we $S_3 \cong D_3$ (S_3 is niet cyclisch). (b) Stel $\sigma : G \times X \to X$ is een groepsactie. Dan $O(x) = \{g(x) : g \in G\}$ heet de baan van x en $G_x := \{g \in G : g(x) = x\}$ heet de stabilisator van x. De afbeelding $g(x) \mapsto gG_x$ geeft een bijectie tussen de elementen van $O(x)$ en de linkernevenklassen van G_x in G. (Geen aftrek als G eindig wordt genomen en $|O(x)| = |G|/|G_x|$ voor de baan-stabilisatorstelling wordt opgeschreven.) (c) De symmetrieën van de ongedecoreerde zeshoek zijn D_4. Zij X de verzameling van alle n^6 gedecoreerde zeshoeken dan hebben we een groepsactie van D_4 op X en het gevraagde antwoord wordt gegeven door de telstelling: $|X^e| = n^6$, $|X^r| = |X^{r^{-1}}| = |X^{r^5}| = n$, $|X^{r^2}| = |X^{r^{-2}}| = |X^{r^4}| = n^2$, $|X^{r^3}| = n^3$. Voor een spiegeling a in de lijn door twee tegenoverliggende hoekpunten geldt: $|X^a| = n^3$ (er zijn 3 zulke spiegelingen). Voor een spiegeling b in de lijn door het midden van twee tegenoverliggende kanten geldt $|X^b| = n^4$ (er zijn drie zulke spiegelingen). Het antwoord volgt.

Opgave 3. (a) De vergelijking $x^3 = 1$ heeft 1 oplossing in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en 3 oplossingen in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dus deze groepen zijn niet isomorf. (b) Zij G een enkelvoudige groep van orde $351 = 3^3 \cdot 13$. Het aantal 13-Sylows ligt in $\{1, 14, 27, ...\}$ en deelt 27 en is dus 27 (1 uitgesloten want G is enkelvoudig). Het aantal 3-Sylows ligt in $\{1, 4, 7, 10, 13, ...\}$ en deelt 13 en is dus 13 (1 is uitgesloten want G is enkelvoudig). Zij $P_1, \ldots, P_{27}$ de verschillende 13-Sylows dan $P_i \cap P_j = \{1\}$ voor alle $i \neq j$ want iedere $P_i \cong \mathbb{Z}_{13}$, dus ieder niet-triviaal element van P_i brengt P_i voort. Dus $\bigcup_i P_i$ bevat $27 \cdot 12 = 324$ niet-triviale elementen. Er is nog ruimte voor één 3-Sylow (met 27 elementen). Tegenspraak. (c) Definieer $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $\phi(g) : G \to G, \phi(g)(x) = gxg^{-1}$. Dan $\phi(gh)(x) = ghx(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = \phi(g)(\phi(h)(x))$ voor alle $g, h \in G$ en $x \in G$, dus $\phi(gh) = \phi(g) \circ \phi(h)$. Voorts $\ker(\phi) = \{g \in G : gxg^{-1} = x\ \forall x \in G\} = Z(G) \lhd G$ en $G/Z(G) \cong \mathrm{im}(\phi) = \mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$ (1ste isomorfiestelling). Stel $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$ en $g \in G$. Schrijf $g = \psi^{-1}(h)$. Dan $(\psi \circ \phi(g) \circ \psi^{-1})(x) = \psi(g\psi^{-1}(x)g^{-1}) = \psi(\psi^{-1}(h)\psi^{-1}(x)\psi^{-1}(h^{-1})) = \psi(\psi^{-1}(hxh^{-1})) = hxh^{-1}$ voor alle $x \in G$ (ψ^{-1} is een groepsisomorfisme), dus $\psi \circ \phi(g) \circ \psi^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$ en $\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$.

Opgave 4. Merk op $rr^4r^{-1} = r^{12} = r^4$ en $sr^4s^{-1} = sr^4s = s^2r^{12} = r^4$ dus $H := \langle r^4\rangle \lhd G$. Merk ook op $(rH)(sH) \neq (sH)(rH)$ want anders $(sr)^{-1}(rs) = r^7srs = r^{10} = r^2 \in H = \{1, r^4\}$ (tegenspraak: r heeft orde 8). Dus G/H is een niet-abelse groep van orde 8 en dus isomorf met D_4 of Q (classificatie). Voorts $(r^2H)(r^2H) = r^4H = H$ en $(sH)(sH) = H$ zijn twee elementen van orde 2 dus $G/H \cong D_4$ want Q heeft maar 1 element van orde 2.