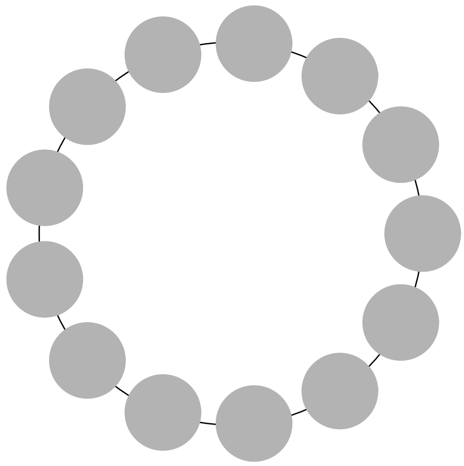
Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB221 werd in 2004/2005 gegeven door Wilberd van der Kallen.

Groepentheorie (WISB221)
31 januari 2005

Opgave 1

Op een kralenketting als in de figuur



kunnen dertien kralen worden geregen. Er is keuze uit twee kleuren kralen. (In de figuur is er maar één gebruikt.) Einddoel van de opgave is om te laten zien dat er in wezen 380 verschillende manieren zijn om de kleuren te combineren. Bijvoorbeeld tellen twee gekleurde kettingen als hetzelfde wanneer de één er uit ziet als de andere op zijn kop.

a) Laat zien dat de symmetriegroep van de ketting in de figuur een diëdergroep D_{13} is.

b) Gebruik nu de aktie van D_{13} op een geschikte verzameling om aan te tonen dat er in wezen 380 verschillende manieren zijn om de kleuren van de kralen te combineren tot zo'n ronde ketting van dertien kralen. Hint: sorteer de elementen van D_{13} naar orde.

   (Rekenhulp: $2^{10} = 1024$)

Opgave 2

Bepaal het teken van de permutatie (123)(45612)(321)(17)(89).

Opgave 3

Schrijf de permutatie (123)(45612)(321)(17) als produkt van disjuncte cykels.

Opgave 4

In de gebruikelijke schrijfwijze zijn e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4 de elementen van de diëdergroep D_5. Welk van deze elementen is $srsr^4sr$?

Opgave 5

Vind de kleinste normaaldeler van A_5 die de driecykel (123) bevat.

Opgave 6

Vind alle ondergroepen van $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

Opgave 7

Vind alle ondergroepen van $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Opgave 8

Geef een voorbeeld met uitleg van, of laat zien dat zoiets niet bestaat:

a) een groep van orde zes met precies drie elementen van orde twee,

b) een groep van orde zes met precies één element van orde twee,

c) een groep van orde 24 met precies vijf Sylow ondergroepen van orde acht,

d) een simpele (=enkelvoudige) groep van orde 33,

e) een groep met precies twee elementen van orde vijf.

Opgave 9

Zij G de draaiingsgroep van de octaëder. Laat X de verzameling van de drie hoofddiagonalen zijn. (Een hoofddiagonaal verbindt twee diametraal tegenover elkaar liggende toppen en gaat dus door het centrum van de octaëder.)
Aangezien de standaard aktie van G de elementen van X permuteert, krijgen we een homomorfisme $\phi : G \to S_X$.
Bepaal de kern van ϕ en het beeld van ϕ.