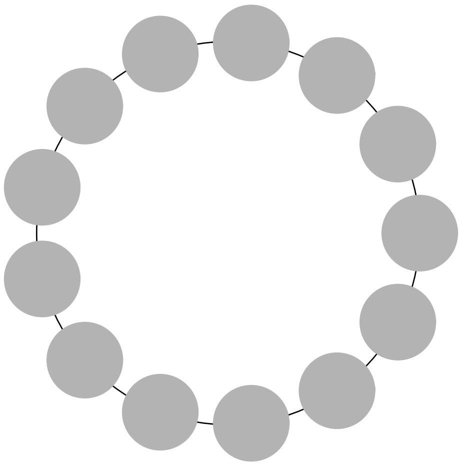
MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE TBC VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE WISB221 WERD IN 2004/2005 GEGEVEN DOOR WILBERD VAN DER KALLEN.
DE UITWERKING IS SAMENGESTELD/GEMAAKT DOOR WOUTER DUIVESTEIJN, OP BASIS VAN AANTEKENINGEN VAN DE DOCENT.

Uitwerking[1] Groepentheorie (WISB221)
31 januari 2005

N.B. De docent had de antwoorden op de vragen in commentaar in zijn LaTeX-file laten staan. Daar heb ik ze dus uitgehaald. Dit is dus niet echt een uitwerking, maar je hebt wél de goede antwoorden.

Opgave 1

Op een kralenketting als in de figuur



kunnen dertien kralen worden geregen. Er is keuze uit twee kleuren kralen. (In de figuur is er maar één gebruikt.) Einddoel van de opgave is om te laten zien dat er in wezen 380 verschillende manieren zijn om de kleuren te combineren. Bijvoorbeeld tellen twee gekleurde kettingen als hetzelfde wanneer de één er uit ziet als de andere op zijn kop.

a) Laat zien dat de symmetriegroep van de ketting in de figuur een diëdergroep D_{13} is.

b) Gebruik nu de aktie van D_{13} op een geschikte verzameling om aan te tonen dat er in wezen 380 verschillende manieren zijn om de kleuren van de kralen te combineren tot zo'n ronde ketting van dertien kralen. Hint: sorteer de elementen van D_{13} naar orde.

   (Rekenhulp: $2^{10} = 1024$)
   Antwoord:
   $1/26(2^{13} + 13 \cdot 2^7 + 12 \cdot 2)$

Opgave 2

Bepaal het teken van de permutatie (123)(45612)(321)(17)(89).
Antwoord: 1

[1]Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@A-Eskwadraat.nl

Opgave 3

Schrijf de permutatie (123)(45612)(321)(17) als produkt van disjuncte cykels.
Antwoord:
(45623)(17)

Opgave 4

In de gebruikelijke schrijfwijze zijn e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4 de elementen van de diëdergroep D_5. Welk van deze elementen is $srsr^4sr$?
Antwoord:
$sr(r)r$, dus sr^3

Opgave 5

Vind de kleinste normaaldeler van A_5 die de driecykel (123) bevat.
Antwoord:
A_5 zelf.

Opgave 6

Vind alle ondergroepen van $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.
Antwoord:
1, alles, ene factor, andere factor. Omdat de groep in feite cyclisch is, hebben we het hiermee wel gehad.

Opgave 7

Vind alle ondergroepen van $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
Antwoord:
vier cyclische en de hele.

Opgave 8

Geef een voorbeeld met uitleg van, of laat zien dat zoiets niet bestaat:

a) een groep van orde zes met precies drie elementen van orde twee,
Antwoord:
S_3 met de tweekringen.

b) een groep van orde zes met precies één element van orde twee,
Antwoord:
Zie $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

c) een groep van orde 24 met precies vijf Sylow ondergroepen van orde acht,
Antwoord:
vijf deelt 24 niet.

d) een simpele (=enkelvoudige) groep van orde 33,
Antwoord:
Zowel de 3-Sylow als de 11-Sylow ondergroepen zijn uniek en dus normaal.

e) een groep met precies twee elementen van orde vijf.
Antwoord:
ondergroep van orde vijf bevat er al meer.

Opgave 9

Zij G de draaiingsgroep van de octaëder. Laat X de verzameling van de drie hoofddiagonalen zijn. (Een hoofddiagonaal verbindt twee diametraal tegenover elkaar liggende toppen en gaat dus door het centrum van de octaëder.)
Aangezien de standaard aktie van G de elementen van X permuteert, krijgen we een homomorfisme $\phi : G \to S_X$.
Bepaal de kern van ϕ en het beeld van ϕ.
Antwoord:
Kern is viergroep en beeld heeft orde zes. De viergroep heeft als elementen van orde twee de draaiingen over 180 graden om de hoofddiagonalen.