Departement Informatica en Informatiekunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB221 werd in 2005/2006 gegeven door Gunther Cornelissen.

Groepentheorie (WISB221)
31 januari 2006

Geef niet enkel antwoorden, laat ook de redenering zien die tot het antwoord leidt. Je mag wel resultaten uit vroegere vragen gebruiken in wat volgt, ook als je die andere vragen niet kan beantwoorden. Het is toegestaan boeken, handouts en aantekeningen te gebruiken.

Opgave 1

a) Schrijf de permutatie $(132)(1345)(352)(2356)$ uit S_6 als product van disjuncte cykels. *(10 punten)*

b) Wat is het teken van een permutatie die het product is van 2006 2006-cykels? *(10 punten)*

c) Schrijf de elementen van de diëdergroep D_8 als $\{e, r, \ldots, r^7, s, rs, \ldots, r^7 s\}$ voor $r, s \in D_8$ zodat $r^8 = s^2 = e$ en $sr = r^{-1}s$. Welk van deze 16 elementen is $s^1 r^2 s^3 r^4 s^5 r^6 s^7 r^8 s^9 \in D_8$? *(10 punten)*

d) Stel dat $G := GL(2, \mathbf{R})$. Bepaal de orde van $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in G. *(10 punten)*

Opgave 2

Bewijs of weerleg:

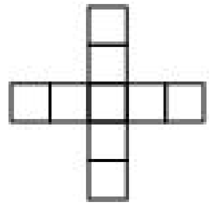
a) Het direct product van een cyclische groep met 15 elementen met een cyclische groep met 28 elementen is isomorf met het direct product van een cyclische groep met 12 elementen met een cyclische groep met 35 elementen. *(10 punten)*

b) Als een groep G werkt op een verzameling X dan werkt elke ondergroep H van G ook op X, en elke baan voor de actie van G op X is een vereniging van zekere banen voor de actie van H op X. *(10 punten)*

c) Er bestaat een enkelvoudige groep met 2006 elementen. [ter informatie: $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$] *(10 punten)*

Opgave 3 ***(15 punten)***

Men beschikt over een onbeperkte hoeveelheid rode, groene en witte kubussen van gelijke grootte. Telkens negen dergelijke blokjes worden aan mekaar gelijmd tot een kruis zoals in de figuur hieronder. Hoeveel écht verschillende kruizen levert dit op (op draaisymmetrieën in de driedimensionale ruimte na)?



[ter informatie: $3^5 = 243, 3^6 = 729, 3^7 = 2187, 3^8 = 6561, 3^9 = 19683$]

Opgave 4

In een groep G bekijken we de ondergroep G_2 voortgebracht door de verzameling $\{g^2 \ : \ g \in G\}$ van "kwadraten in G".

a) Bewijs dat G_2 normaal is in G. *(5 punten)*

b) Bewijs dat elk element van G/G_2 van van orde ≤ 2 is. *(5 punten)*

c) Als $\phi : G \to H$ een groepshomomorfisme is zodat elk element van het beeld van ϕ orde ≤ 2 heeft, dan is $G_2 \subseteq \ker(\phi)$. Bewijs dit. *(5 punten)*