Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college WISB221 werd in 2006/2007 gegeven door Wilberd van der Kallen.

Groepentheorie (WISB221)
29 januari 2007

- *Geef niet enkel antwoorden, laat ook de redenering zien die tot het antwoord leidt. Je mag wel resultaten uit vroegere vragen gebruiken in wat volgt, ook als je die andere vragen niet kan beantwoorden.*
- *Het is toegestaan boeken, handouts en aantekeningen te gebruiken*

Opgave 1

De permutatie $\sigma \in S_n$ is het volgende product van $m-1$ cykels, waarbij elke cykellengte $\leq m$ precies één keer als lengte van een factor in σ voorkomt (met $m \leq n$):

$$\sigma = (12)(123)(1234)\cdots(1234\ldots m)$$

a) Wat is het teken van σ als functie van m?

b) Schrijf het inverse van σ als product van cykels.

Opgave 2

De diëdergroep D_4 heeft r en s als voortbrengers met relaties $r^4 = e$, $s^2 = e$, $srsr = e$. Welk van de 8 elementen $\{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ is sr^2sr^7?

Opgave 3

Stel dat $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $h = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Wat is de orde van g, h en van gh in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?

Opgave 4

Geef,voor elk geheel getal $n > 1$ een voorbeeld van een groep met n elementen waarvan alle ondergroepen normaal zijn.

Opgave 5

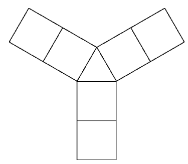
Toon aan: voor elke groep met $2007 (= 3^2 \cdot 223)$ elementen bestaat er een surjectief groepshomomorfisme naar een groep met 9 elementen.

Opgave 6

Geef een voorbeeld van twee niet-commuterende elementen in de draaisymmetriegroep van de kubus.

Opgave 7

Gegeven is een gelijkzijdig driehoek en een aantal vierkantjes in N kleuren, waarvan de zijden dezelfde lengte hebben als die van de driehoek. Hieruit wordt de Y-vorm als op de figuur hieronder gebouwd, waarbij op elke zijde van de driehoek k opeenvolgende vierkantjes staat (op het plaatje is $k = 2$). Bepaal het aantal dergelijke gekleurde Y-vormen als functie van N en k, op draaisymmetriën van de figuur in de ruimte na (het driehoekje wordt hierbij niet ingekleurd).



Opgave 8

Als G een groep is, bekijk dan de afbeelding

$$\phi_G : G \to \mathrm{Aut}(G) : g \to \theta_g \text{ met } \theta_g(x) = gxg^{-1}, \forall x \in G.$$

a) Toon aan: ϕ_G is een groepshomomorfisme.

b) Toon aan: als ϕ_G injectief is, dan ook $\phi_{\mathrm{Aut(G)}} : \mathrm{Aut(G)} \to \mathrm{Aut(Aut(G))}$