Tentamen Numerieke Wiskunde
dinsdag, 8 november 2011, 9.00 – 12.00

1. Zet op ieder vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel bovendien nog je studierichting en studentnummer.
2. Je mag het dictaat gebruiken, de uitwerkingen van de opgaven echter niet. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt geef dan duidelijk aan welk resultaat (nummer, pagina, etc.). Resultaten uit een vorig onderdeel mag je gebruiken ook al lukte het je niet om dat onderdeel te bewijzen.
3. Geef bij het beantwoorden van de vragen een duidelijke argumentatie (ook als dat niet expliciet gevraagd wordt).
4. $f \equiv g$ betekent 'f is *per definitie* gelijk aan g'.
5. Succes.

1. Voor $f \in C^{(6)}([-1,1])$ benaderen we $I(f) \equiv \int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$ met de kwadratuur formule

$$Q(f) = w_0 f(-1) + w_1 f(-\alpha) + w_1 f(\alpha) + w_0 f(1).$$

We kiezen w_0, w_1 en α zo dat Q alle polynomen p van graad $\leq k$ met k maximaal exact integreert, d.w.z. $I(p) = Q(p)$.

(a) f is oneven als $f(-t) = -f(t)$ $(t \in [-1, +1])$. Laat zien dat Q oneven functies exact integreert. Laat zien dat voor even functies f (d.w.z., $f(-t) = f(t)$ $(t \in [-1,1])$) geldt

$$\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{en} \quad Q(f) = 2[w_1 f(\alpha) + w_0 f(1)$$

Concludeer dat het voldoende is om

$$\int_{0}^{1} p(t)\ \mathrm{d}t = w_1 p(\alpha) + w_0 p(1)$$

exact te hebben voor even polynomen p van zo hoog mogelijke graad.

(b) Bepaal w_0, w_1 en α. (Hint: bekijk $1 - x^2$ en $1 - x^4$). Tot welk graad is de formule nu exact?

(c) Bewijs met behulp van een geschikt interpolatie polynoom dat er een $c \neq 0$ is en een $k \in \mathbb{N}$ zo dat voor iedere $f \in C^{(\infty)}([-1,1])$ geldt

$$I(f) = Q(f) + cf^{(k)}(\xi) \quad \text{voor zekere} \quad \xi \in [-1, 1]$$

(Hint: gebruik ook f'-waarden). Toon aan dat $k = 6$.

(d) Laat zien dat voor $h = 1/n$ en voor zekere $\xi \in [0, 2h]$ geldt

$$\int_{0}^{2h} f(t)\ \mathrm{d}t = h[w_0 f(0) + w_1 f(h(1-\alpha)) + w_1 f(h(1+\alpha)) + w_0 f(2h)] + ch^7 f^{(6)}(\xi)$$

Geef de n-maal gerepeteerde formule $Q_n(f)$ om $\int_0^2 f(t)\ \mathrm{d}t$ te benaderen.

Laat zien dat voor de bijbehorende restterm $R_n(f)$ geldt

$$R_n(f) \approx \tfrac{1}{2} ch^6 \int_{0}^{2} f^{(6)}(x)\ \mathrm{d}x$$

2. Voor een gladde functie f willen we de volgende integraal uitrekenen

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

(a) Bestaat deze integraal? Kan de gereperteerde trapezium regel (zonder meer) gebruikt worden?
(b) We vervangen x door $\cos(t)$. Hoe ziet de resulterende integraal (en integrant g) er uit? Is de gerepeteerde trapezium regel nu wel toepasbaar?

We vinden de volgende resultaten als we de gerepeteerde trapezium regel toe passen met verschillende stapgrootten $h > 0$.

$1/h$	$T_h(g)$
1	0.1353352832366127
2	0.5676676416183064
4	0.4677735413948743
8	0.4657596808798165
16	0.4657596075936404
32	0.4657596075936404

(c) Passen deze getallen redelijk bij een fout die evenredig is met h^2. Was dit te verwachten? Is de fout wel evenredig met een andere macht van h?
(d) Hoe schat je de fout in het (naar alle waarschijnkljkheid) beste resultaat in de gegeven $T_h(g)$ waarden?
(e) Heeft het zin om een Romberg schema op te zetten? Heeft het zin om de Bulirsch rij te gebruiken?

3. We willen een functie f op het interval $[-1,1]$ benaderen met een tweede graads interpolatie polynoom.
(a) Hoeveel steunpunten heb je nodig?
(b) Met welke steunpunten verwacht je de kleinste benaderingsfout te krijgen? (Hint: beargumenteer dat je de steunpunten het best symmetrisch kunt kiezen. De oplossing van de vergelijking $\frac{2}{3\sqrt{3}}\tau^3 = 1-\tau^2$ is $\tau = \frac{1}{2}\sqrt{3}$).
(c) Laat p het polynoom zijn dat bij het vorige onderdeel past. Laat zien dat, in geval $f \in C^{(3)}([-1,1])$, geldt

$$|f(x) - p(x)| \le \frac{1}{24} \max_{|\xi|\le 1} |f^{(3)}(\xi)| \qquad (x \in [-1,1])$$

(d) Zij $f \in C^{(3)}([a,b])$. Laat p het beste benaderende polynoom van graad ≤ 2 voor f zijn op het interval $[a,b]$, d.w.z

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \le \max_{x\in[a,b]} |f(x) - q(x)| \text{ voor ieder polynoom } q \text{ van graad} \le 2$$

Toon aan dat

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \le \frac{(b-a)^3}{8\cdot 24} \max_{\xi\in[a,b]} |f^{(3)}(\xi)|.$$