Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In electronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{BC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB251 werd in 2003/2004 gegeven door Dr. R.P. Stevenson.

Numerieke Wiskunde I (WISB251)
14 november 2003

- Vermeld op elk vel dat je inlevert je naam, en op het eerste vel bovendien je studentnummer, het aantal ingeleverde vellen en je studierichting.
- Het is *niet* toegestaan het diktaat of je aantekeningen te raadplegen.
- Resultaten uit een vorig onderdeel van een opgave mag je gebruiken, ook al lukt het je niet dat onderdeel te bewijzen.
- **SUCCES!**

Opgave 1

We gaan aangepaste kwadratuurformules maken voor integralen van het type

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\ln(x)dx,$$

waarbij f voldoende glad is.

(a). Waarom kun je niet veel goeds verwachten van de toepassing met $g : x \mapsto f(x)\ln(x)$ van een interpolatoire kwadratuurformule $g \mapsto \sum_{i=0}^n w_i g(x_i)$ ter benadering van $\int_0^1 g(x)dx$? Welk extra probleem treedt er in het algemeen op bij de toepassing van de trapeziumregel?

(b). Laat zien dat voor alle $k \in I\!N$, $\int_0^1 x^k \ln(x)dx = -\frac{1}{(k+1)^2}$.

(c). Zij ϕ het lineaire interpolatiepolynoom van f met steunpunten 0 en 1. Bereken $\int_0^1 \phi(x)\ln(x)dx$.

(d). Laat zien dat de fout in deze kwadratuurformule te schrijven is als

$$cf^{(n)}(\xi) \qquad (\xi \in [0,1]),$$

en bepaal de constante c en n.

(e). Voor $a \in (0,1]$, bekijken we nu kwadratuurformules van het type

$$Q_a(f) = w_a f(a),$$

Bepaal a en w_a zodanig dat $Q_a(p) = I(p)$ voor alle polynomen p van graad kleiner of gelijk aan 1.

(f). Beantwoord vraag (d) voor de kwadratuurformule uit vraag (e).

Opgave 2

Veronderstel een machine welke iedere elementaire bewerking zoals optellen, vermenigvuldigen etc., als ook de evaluatie van iedere standaard functie zoals e-macht, sinus etc., toegepast op machinegetallen uitvoert met een absolute relatieve fout van ten hoogste $\bar{\xi}$. Zij x een machinegetal dichtbij 0.

(a). Waarom geeft een directe berekening van $\frac{\sin(2x)-\sin(x)}{x}$ problemen? Ontwerp nu een stabiele berekeningswijze van deze grootheid. Geef een afrondfouten analyse voor beide methoden, waarbij je mag aannemen dat een vermenigvuldiging met 2 exact wordt uitgevoerd.

(b). We berekenen nu $\frac{e^x-1}{x}$ op de machine d.m.v. de volgende twee stappen: (1) $y = e^x$, (2) $\frac{y-1}{\log(y)}$. Laat zien dat indien stap (2) exact wordt uitgevoerd, de absolute fout in de buurt van $x = 0$ begrensd wordt door $\approx \frac{1}{2}\bar{\xi}$ [Hint: Je mag gebruiken dat $g : (0, \infty) \to I\!R$ gedefinieerd door

$$g(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{\log(y)} & \text{als } y \neq 1 \\ 1 & \text{als } y = 1 \end{cases}$$

continu differentieerbaar is, met $g'(1) = \frac{1}{2}$]. Geef tenslotte een bovengrens voor de absolute fout indien ook stap (2) op de machine wordt uitgevoerd.

Opgave 3

Zij p het Hermite interpolatiepolynoom van een voldoend gladde functie f op de steunpunten $a \neq b$. Bewijs dat voor iedere x er een $\xi \in]a, b, x[$ bestaat met

$$f(x) - p(x) = (x-a)^2(x-b)^2 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}.$$

(Hint: Voor vaste $x \neq a, b$, zij q zodanig dat $f(x) - p(x) = q(x-a)^2(x-b)^2$. Bewijs dat de afgeleide van $\phi : t \mapsto f(t) - p(t) - q(t-a)^2(t-b)^2$ vier verschillende nulpunten heeft.)

Opgave 4

Met $hn = 2$, zij $T(h)$ het resultaat van de $n\times$-gerepeteerde trapeziumregel ter benadering van $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. Bekend is dat er getallen $B_2, B_4, \ldots$ zijn zodanig dat voor iedere m, en voldoend gladde f,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx - T(h) = -\sum_{i=1}^{m-1} h^{2i} B_{2i}[f^{(2i-1)}(1) - f^{(2i-1)}(-1)] - 2h^{2m} B_{2m} \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}.$$

Construeer nu als een geschikte lineare combinatie van $T(h)$ en $T(h/2)$ de (gerepeteerde) Simpson regel. Door dit principe nogmaal toe te passen construeer de zogenaamde Milne regel $f \mapsto \frac{1}{45}[7(f(-1)+f(1))+32(f(-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2}))+12f(0)]$. Laat zien dat de Milne regel exact is voor polynomen van graad 5, en dat dezelfde regel verkregen kan worden door integratie van het Lagrange interpolatiepolynoom op de steunpunten $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$.