Tentamen Numerieke Wiskunde
dinsdag, 28 januari 2014, 13.30–16.30

1. Zet op ieder vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel bovendien nog je studentnummer.
2. Je mag het dictaat gebruiken, de uitwerkingen van de opgaven echter niet. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt geef dan duidelijk aan welk resultaat (nummer, pagina, etc.). Resultaten uit een vorig onderdeel mag je gebruiken ook al lukte het je niet om dat onderdeel te bewijzen.
3. Geef bij het beantwoorden van de vragen een duidelijke argumentatie (ook als dat niet expliciet gevraagd wordt).
4. $f \equiv g$ betekent 'f is *per definitie* gelijk aan g'. Met 'f is een *gladde functie*' bedoelen we dat alle afgeleiden van f die je in formules tegenkomt bestaan en continu zijn.
5. Succes.

1. We willen van een gladde functie f op $\mathbb{R}$ de waarde $f'(0)$ berekenen. Van f zijn, voor $h > 0$, de waarden in 0, h en $2h$ bekend. We proberen, met geschikte $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, een nauwkeurige benadering te vinden van $f'(0)$ met de volgende formule

$$D_h(f) \equiv \frac{\alpha f(0) + \beta f(h) + \gamma f(2h)}{h}. \tag{1}$$

Zij $R_h(f) \equiv f'(0) - D_h(f)$ de fout. De formule is *exact voor* f als $R_h(f) = 0$.

(a) Bepaal α, β en γ zodat de formule exact is voor polynomen van zo hoog mogelijke graad, d.w.z., we willen dat $p'(0) = D_h(p)$ voor alle polynomen p van graad $\leq k$ met k zo groot mogelijk. Welke waarde heeft k dan?

3 Oplossing. We nemen voor f achtereenvolgens $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, ... We vinden dan voor $R_h(f)$:

$$\begin{array}{ll} a) & R_h(1) = 0 - [\alpha + \beta + \gamma]/h \\ b) & R_h(x) = 1 - [\beta + 2\gamma] \\ c) & R_h(x^2) = 0 - [\beta h + \gamma 4h] \\ d) & R_h(x^3) = 0 - [\beta h^2 + \gamma 8h^2] \\ & \vdots \end{array}$$

We stellen in de eerste drie uitdrukkingen $R_h(f)$ gelijk aan 0. Dan hebben we drie vergelijkingen: a') $\alpha + \beta + \gamma = 0$, b') $\beta + 2\gamma = 1$, c') $\beta + 4\gamma = 0$ met drie onbekenden α, β en γ. ''c') -b')'' levert $\gamma = -\frac{1}{2}$. Invullen in c') geeft $\beta = 2$, invullen in a') geeft $\alpha = -1\frac{1}{2}$. Voor deze waarden van α, β en γ is, volgens d), $R_h(x^3) = 2h^2 \neq 0$ en dus is $k \ngeq 3$. Omdat $f \rightsquigarrow f'(0)$ en $f \rightsquigarrow D_h(f)$ lineair zijn is $f \rightsquigarrow R_h(f)$ lineair en volgt exactheid voor alle polynomen van graad ≤ 2. Blijkbaar is $k = 2$.

Verder werken we met de optimale α, β en γ (de waarden die je in a) gevonden hebt).

(b) Laat zien dat voor een zekere $c \in \mathbb{R}$ (met c onafhankelijk van f en h) geldt dat

$$R_h(f) = ch^2 f^{(3)}(0) + \mathcal{O}(h^3) \qquad (h \to 0). \tag{2}$$

(Hint: bedenk ook dat $D_h(f) = \mathcal{O}(h^{m-1})$ als $f(h) = \mathcal{O}(h^m)$ voor een $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ $\quad (h \to 0)$. Dit geldt overigens voor iedere α, β en γ.) Bepaal c.

2 Oplossing. Als, voor $m \geq 2$, $f(h) = \mathcal{O}(h^m)$ dan is $|f(h)| \leq Ch^m$ voor zekere C en is $|D_h(f)| \leq C\frac{1}{h}[|\alpha| + |\beta| + |\gamma|]h^m \leq 4Ch^{m-1}$, dus in dit geval is $D_h(f) = \mathcal{O}(h^{m-1})$.
Voor f geldt $f(x) = p(x) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + g(x)$ waarbij p het tweede graads Taylor polynoom is voor f rond 0 en g de restterm van het derde graads Taylorpolynoom van f rond 0. Omdat $f'(0) = p'(0)$ en $g'(x) = f'(x) = p'(x) - \frac{x^2}{2!}f'''(0)$ volgt dat $g'(0) = 0$. Verder is $g(h) = \mathcal{O}(h^4)$. Dit levert

$$R_h(f) = R_h(p) + \frac{1}{3!}f'''(0)R_h(x^3) + R_h(g) = 0 + \frac{1}{3!}f'''(0)2h^2 + (0 - \mathcal{O}(h^3)) = \frac{1}{3}h^2 f'''(0) + \mathcal{O}(h^3).$$

(c) Kan je een Romberg schema opzetten om middels de drie waarden $D_h(f)$, $D_{\frac{1}{2}h}(f)$, $D_{\frac{1}{4}h}(f)$ nauwkeurigere benaderingen van $f'(0)$ te krijgen? Zo ja, beschrijf dan in detail hoe je de overige drie getallen in Romberg schema uitrekent. Wat voor orde van nauwkeurigheid verwacht je in deze getallen?

3 <u>Oplossing.</u> Voor kleine h (en h niet zo klein dat evaluatiefouten de fout domineren) is de fout ongeveer evenredig met h^2. Dus is $f'(0) - D_{\frac{1}{2}h}(f) \approx \frac{1}{4}(f'(0) - D_h(f))$ en is $f'(0) - D_{\frac{1}{2}h}(f) \approx \frac{1}{3}(D_{\frac{1}{2}h}(f) - D_h(f))$. We verwachten dat

$$T_h(f) \equiv \frac{1}{3}(4D_{\frac{1}{2}h}(f) - D_h(f))$$

oen $\mathcal{O}(h)$ betere benadering is van $f'(0)$ dan $D_{\frac{1}{2}h}(f)$.
Om de volgende kolom in het Romberg schema te kunnen opstellen moeten we weten of de fout in $T_h(f)$ ongeveer evenredig is met h^p voor een $p \geq 3$. Hiervoor moeten we weten of de $\mathcal{O}(h^3)$ term in $R_h(f)$ van de vorm $\tilde{c}h^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$ is. Uitschrijven van de g in de Taylor benadering van f in het bewijs van b) geeft $g(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 + \mathcal{O}(h^5)$, en uitrekenen van $R_h(x^4)$ toont aan dat $\mathcal{O}(h^3)$ term in $R_h(f)$ van de vorm $\tilde{c}h^3 + \mathcal{O}(h^4)$ is. Dus bij stapgrootte halvering reduceert de fout in $T_h(f)$ met een factor 8. We kunnen de fout in $T_h(f)$ schatten volgens $f'(0) - T_{\frac{1}{2}h}(f) \approx \frac{1}{7}(T_{\frac{1}{2}h}(f) - T_h(f))$ en we verwachten dat

$$T_h^{(2)}(f) \equiv \frac{1}{7}(8T_{\frac{1}{2}h}(f) - T_h(f))$$

en $\mathcal{O}(h)$-betere benadering is voor $f'(0)$ dan $T_h(f)$. Dus we verwachten een fout van $\mathcal{O}(h^4)$. (Door f nog een stap verder te ''Tayloren'' kan je checken dat het niet $\mathcal{O}(h^5)$ zal zijn.
Resumerend, $D_h(f)$, $D_{\frac{1}{2}h}(f)$, $D_{\frac{1}{4}h}(f)$ staat in de eerste kolom van het Romberg schema, $T_h(f)$ en $T_{\frac{1}{2}h}(f)$ in de tweede en $T_h^{(2)}(f)$ in de derde, met fout respectievelijk $\mathcal{O}(h^2)$, $\mathcal{O}(h^3)$ en $\mathcal{O}(h^4)$.

(d) Stel nu dat we niet over de exacte waarden $f(x)$ kunnen beschikken maar alleen over benaderingen $f^*(x)$ met bekende onbetrouwbaarheid $\overline{\varepsilon}$: met $\varepsilon(x) \equiv f(x) - f^*(x)$ is $|\varepsilon(x)| \leq \overline{\varepsilon}$ (alle x). In plaats van $f(x)$ gebruiken we $f^*(x)$ om $D_h(f)$ te berekenen (eventuele andere evaluatiefouten verwaarlozen we). Dit levert $D_h^*(f)$ op. Schat $|D_h(f) - D_h^*(f)|$ af en schat af hoe deze fout doorwerkt in het Romberg schema van (c).

2 <u>Oplossing.</u>

$$|D_h(f) - D_h^*(f)| = \frac{1}{h}|\alpha\varepsilon(0) + \beta\varepsilon(h) + \gamma\varepsilon(2h)| \leq \frac{1}{h}[|\alpha|\overline{\varepsilon} + |\beta|\overline{\varepsilon} + |\gamma|\overline{\varepsilon}] \leq 4\frac{\overline{\varepsilon}}{h}.$$

Hierbij hebben we in a) gevonden waarden van α, β en γ gebruikt en het feit dat $\varepsilon(x)$ iedere waarde (zowel negatief als positief) in $[-\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon}]$ kan hebben. Omdat de 'ε' fout in $D_h^*(f)$ onafhankelijk is van die in $D_{\frac{1}{2}h}^*(f)$ resulteert dit in een onzekerheid van

$$\frac{1}{3}(4 \cdot 4\frac{\overline{\varepsilon}}{\frac{1}{2}h} + 4\frac{\overline{\varepsilon}}{h}) = 12\frac{\overline{\varepsilon}}{h}$$

in $T_h^*(f)$. En dit leidt weer tot een onzekerheid van

$$\frac{1}{7}(8 \cdot 12\frac{\overline{\varepsilon}}{\frac{1}{2}h} + 12\frac{\overline{\varepsilon}}{h}) = 12 \cdot \frac{17}{7}\frac{\overline{\varepsilon}}{h}.$$

in ${T^{(2)}}_h^*(f)$.

2. Beschouw op het interval $[0, \pi]$, voor iedere $\alpha \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, de functie

$$f_\alpha(t) \equiv \sin^{1+\alpha}(t)\ \exp(-\cos^2(t)) \quad (t \in [0, \pi]) \quad \text{met integraal} \quad I(\alpha) \equiv \int_0^\pi f_\alpha(t)\ \mathrm{d}t.$$

(a) We berekenen $I(\alpha)$ met de gerepeteerde trapeziumregel $T_h(f_\alpha)$ met stapgrootte $h = \pi/(4n)$ voor verschillende waarden voor n. De computer produceert voor de drie α's de volgende getallen (per α een kolom).

	A	B	C
n	$T_h(f)$	$T_h(f)$	$T_h(f)$
1	1.459084343274	1.261766229580	1.351898457062
2	1.484314179088	1.258924268916	1.357574013183
4	1.491292039591	1.258924256552	1.359030681071
8	1.493057785731	1.258924256552	1.359292839266
16	1.493500556661	1.258924256552	1.359339387697
32	1.493611332822	1.258924256552	1.359347625420

Helaas is in de output niet vermeld welke kolom bij welke α hoort ($f = f_\alpha$). Kan je (zonder op de eerste twee decimalen in ieder getal te letten) met enige zekerheid vaststellen bij welke kolom (A, B of C) welke α hoort? Beargumenteer je antwoord. (De eerste twee decimalen zou je eventueel kunnen gebruiken om je antwoord te "checken".)

6 Oplossing. We berekenen de Vertrouwens getallen

$$V_h(f) \equiv \frac{T_{4h}(f) - T_{2h}(f)}{T_{2h}(f) - T_h(f)}$$

voor de drie kolommen. Als de fout ongeveer evenredig is met h^β voor zekere $\beta > 0$ dan zal $V_h(f) \approx 2^\beta$ zijn. Voor de $V_h(f)$ vinden we

A	B	C
3.61570	229849.47313	3.89626
3.95179	-27842250.00000	5.55645
3.98795	∞	5.63194
3.99699	NAN	5.65064

De getallen bij A lijken naar 4 te convergeren en passen dan bij $\beta = 2$, die bij C lijken op $4\sqrt{2}$, dus $\beta = 2\frac{1}{2}$ en bij B lijkt de fout sneller te reduceren dan h^β voor iedere $\beta > 0$.
Met $\alpha = 0$ is de functie $f = f_\alpha$ in $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ en is $f'(t) = (\cot(t) - 2\sin^2(t))\exp(-\cos^2(t))$. Dus $f'(\pi) - f'(0) = -1/e - 1 \neq 0$ (immmers $\sin t = 0$ voor $t = 0$ en $t = \pi$ en $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$). In dit geval is de fout in de gerepeteerde trapeziumregel $\approx -\frac{1}{12}h^2(-1/e - 1)$, dus evenredig h^2.
Conclusie: A lijkt te corresponderen met $\alpha = 0$.
Voor $\alpha = 1$ is $f(t) = \sin^2(t)\exp(-\cos^2(t)) = (1 - \cos^2(t))\exp(-\cos^2(t)) = g(\cos(t))$ met g een gladde functie: $g(x) = (1 - x^2)e^{-x^2}$. Dus is $f'(t) = -\sin(t)g'(\cos(t))$ en zien we dat $f'(\pi) = f'(0) = 0$. Verder is $f''(t) = \cos(t)g'(\cos(t)) + \sin^2(t)g''(\cos(t)) = \widetilde{g}(\cos(t))$ met $\widetilde{g}$ glad: $\widetilde{g}(x) \equiv xg'(x) + (1 - x^2)g''(x)$. Door voor f'' de redenering als voor f te volgen maar nu met $\widetilde{g}$ i.p.v. g komen we voor f'' tot dezelfde conclusies als voor f: $f'''(\pi) = f'''(0)$ en $f^{(4)}(t) = \widetilde{\widetilde{g}}(\cos(t))$ voor een gladde functie $\widetilde{\widetilde{g}}$, etc. Dus alle termen in de Euler-MacLaurin ontwikkeling van de fout in degerepeteerde trapezium regel zijn 0 (immers $f^{(2j+1)}(\pi) - f^{(2j+1)}(0) = 0$) . Dit wijst op een supersnelle convergentie en dat lijkt het geval te zijn met de getallen in kolom B.
Conclusie: B lijkt te corresponderen met $\alpha = 1$.
Conclusie: Dan zal C wel corresponderen met $\alpha = \frac{1}{2}$.
(Bonus:) Merk op dat voor $\alpha = \frac{1}{2}$ de functie $f = f_\alpha$ niet glad is, en kunnen we geen Euler-MacLaurin reeks opstellen voor de fout in $T_h(f)$. f is differentieerbaar en ''bevat nog een sinus term''. Wat rekenwerk leert dat $f'(0) = f'(\pi) = 0$. Dus de h^2-term in de Euler-MacLauren reeks is 0. De hogere afgeleiden bestaan niet in 0 en π. Dus als de fout evenredig is met h^β dan is dat voor een $\beta \in (2, 4)$ en dat zou $\beta = 2\frac{1}{2}$ kunnen zijn.
(Bonus:) op $(0, \pi)$ is $\sin(t) \in (0, 1)$ en dus $sin^2(t) < sin^{1.5}(t) < sin(t)$. Omdat $\exp(\ldots) > 0$ volgt dat $I(1) < I(0.5) < I(0)$. Schatten we I als limiet van $T_h(f_\alpha)$ ($h \to 0$) uit de getallen in de kolommen, dan: in geval A, $I \approx 1.49$; in geval, B $I \approx 1.26$; in geval C, $I \approx 1.36$. Op grond van de verwachte ordening correspondeert B met $\alpha = 1$, C met $\alpha = \frac{1}{2}$ en A met $\alpha = 0$. Dit komt overeen met onze conclusies boven.

(b) Laat zien dat

$$I(\alpha) = \int_{-1}^{+1} g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{met} \quad g_\alpha(x) \equiv (1 - x^2)^{\alpha/2}\exp(-x^2).$$

1 Oplossing. De identiteit volgt door voor $x = \cos(t)$ te substituéren: $\mathrm{d}x = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$).

We kunnen $I(\alpha)$ dus ook berekenen met de gerepeteerde trapeziumregel $T_h(g_\alpha)$ met $h = \frac{2}{n}$. Heeft, voor $\alpha \in \{0, 1\}$, $T_h(f_\alpha)$ of $T_h(g_\alpha)$ de voorkeur? (Geef voor- en tegenargumenten.)

3 Oplossing. Voor $\alpha = 1$ levert, zoals we in a) gezien hebben (kolom B), de overgang naar de t-variabele een zeer snel convergente gerepeteerde trapezium regel op, terwijl in x-variabele alle afgeleiden van de functie g_α een singulariteit hebben in $x = -1$ en in $x = 1$: $g_1(x) = sqrt1 - x^2 \exp(-x^2)$. We verwachten dus dat daar zelfs geen convergentie evenredig met h^2 gehaald wordt (maar veel langzamer). Kortom, met een tamelijke grootte h verwachten we met f_1 een zelfde precisie als met zeer kleine h met g_1. Dus om een zekere nauwkeurigheid te halen moeten we met g_1 aanzienlijk meer functiewaarden berekenen dan met f_1.
$\alpha = 1$: Onze voorkeur gaat uit naar $T_h(f_\alpha)$.
Voor $\alpha = 0$ zijn beide functies $f = f_\alpha$ en $g = g_\alpha$ glad en zijn de waarden $f'(\pi) - f'(0)$ en $g'(1) - g'(-1)$ beiden $\neq 0$. Dus in beide gevallen is de fout evenredig met h^2. (Voor oneven hogere orde afgeleide geldt hetzelfde en zijn alle coëfficiënten voor de h^{2j} termen in Euler-MacLaurin reeks $\neq 0$). Om een zekere nauwkeurigheid te halen verwachten we in beide gevallen ongeveer even veel functiewaarden te moeten berekenen (dit geldt voor gebruik van de gerepeteerde trapezium regel; een precise uitspraak is lastig omdat we de constanten in de fout term van $\mathcal{O}(h^2)$ niet kennen). De functie-evaluaties van f zijn waarschijnlijk veel duurder dan die van g (voor f moet voor iedere t naast de exp ook nog een sinus en een cosinus uitgerekend worden).
$\alpha = 0$: We verwachten dat de berekening via g efficiënter is dan via f.

3. Zij $B \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ zo dat $B(x) > 0$ als $|x| < 2$ en $B(x) = 0$ als $|x| \geq 2$.
Voor iedere $h > 0$ en iedere $f \in C(\mathbb{R})$ definiëren we (sommerend over gehele getallen j)

$$B_h(x) \equiv B(x/h), \qquad S_h(f)(x) \equiv \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(jh) B_h(x - jh) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{3}$$

(a) Laat zien dat

$$S_h(f)(x) = \sum_{j=-1}^{2} f(jh) B_h(x - jh) \quad \text{als} \quad x \in [0, h]. \tag{4}$$

1 Oplossing. $B_h(x - jh) = B(\frac{x}{h} - j) = 0$ als $|\frac{x}{h} - j| \geq 2 \;\Leftrightarrow\; |x - jh| \geq 2h \;\Leftrightarrow\; x \notin ((j-2)h, (j+2)h)$.
Voor $j \notin \{-1, 0, 1, 2\}$ is $[0, h] \cap ((j-2)h, (j+2)h) = \emptyset$ en dus is $B_h(x - jh) = 0$ als $x \in [0, h]$.

Bewijs dat $S_h(f) \in C^{(1)}(\mathbb{R})$.

1 Oplossing. Als boven volgt dat, voor iedere $i \in \mathbb{Z}$, $S_h(f)(x)$ een som is over vier termen voor iedere $x \in [ih, ih + h]$. Omdat ieder interval $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ ($y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$) te overdekken is met eindig veel intervallen van de vorm $[ih, ih + h]$ volgt dat $S_h(f)$ op $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ een eindige combinatie is van veelvouden van $x \rightsquigarrow B_h(x - jh)$ (merk op dat $f(jh)$ een scalair is, d.w.z., niet van x afhangt). Omdat B in $C^{(1)}(\mathbb{R})$ is, $x \rightsquigarrow B_h(x - jh)$ dat ook evenals iedere eindige lineaire combinatie van dit soort termen. Dit toont aan dat $S_h(f)$ continu differentiëerbaar is op $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Omdat y en ε willekeurig zijn, volgt $S_h(f) \in C^{(1)}(\mathbb{R})$.

Stel verder dat B zo is dat $S_1(p) = p$ voor ieder polynoom p van graad ≤ 1.

(b) Beschouw een $x \in [0, h]$. Toon aan dat voor ieder eerste graads polynoom p geldt

$$S_h(p) = p, \quad f(x) - S_h(f)(x) = (f(x) - p(x)) - \sum_{j=-1}^{2} (f(jh) - p(jh))\, B_h(x - jh). \tag{5}$$

1 Oplossing. Definiëer $q(y) \equiv p(yh)$ en $y \equiv \frac{x}{h}$. Dan is $q(y) = p(x)$ en zien we dat, in geval p een eerste graads polynoom is,

$$S_h(p)(x) = \sum_j p(jh) B(\frac{x}{h} - j) = \sum_j q(j) B(y - j) = S_1(q)(y) = q(y) = p(x).$$

Hierbij hebben we gebruikt dat q ook een eerste graads polynoom is en het gegevene, $S_1(p) = p$. Uit $S_h(p) = p$ volgt dat $f - S_h(f) = (f - p) - S_h(f - p)$ voor ieder eerste graads polynoom p: immers, $f \rightsquigarrow S_h(f)$ is lineair. Tenslotte leidt (4) tot de gewenste uitspraak.

Bewijs ook dat

$$|f(x) - S_h(f)(x)| \leq |f(x) - p(x)| + \max\{|f(t) - p(t))| \,\big|\, t = -h, 0, h, 2h\}. \tag{6}$$

2 Oplossing. De driehoeksongelijkheid op (5)(b) levert

$$|f(x) - S_h(f)(x)| \leq |f(x) - p(x)| + \sum_{j=-1}^{2} |f(jh) - p(jh)|\, B_h(x - jh).$$

Hierbij is gebruikt dat $B \geq 0$. Verder is

$$\sum_{j=-1}^{2} |f(jh) - p(jh)|\, B_h(x - jh) \leq \max\{|f(jh) - p(jh))| \,\big|\, j = -1, 0, 1, 2\} \sum_{j=-1}^{2} B_h(x - jh)$$

en is, volgens (4) en (5)(a),

$$\sum_{j=-1}^{2} B_h(x - jh) = \sum_j 1 \cdot B_h(x - jh) = S_h(1) = 1.$$

Hierbij is 1, de constante functie 1 (een 0-de graads polynoom). Nu volgt (6) door $t = jh$ te nemen.

(c) Laat zien dat, in geval $f \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, voor iedere $x \in [0, h]$ geldt

$$|f(x) - S_h(f)(x)| \leq \frac{9}{8} h^2 |f''(\xi)| \quad \text{voor zekere } \xi \in [-h, 2h] \subset [x - 2h, x + 2h]. \tag{7}$$

4 Oplossing. We gebruiken (6) en we proberen een eerste graads polynoom p vinden waarvoor

$$C \equiv |f(x) - p(x)| + \max\{|f(t) - p(t))| \,\big|\, t = -h, 0, h, 2h\} \leq \frac{9}{8} h^2 |f''(\xi)| \quad (x \in [0, h])$$

Welnu, neem voor p het Lagrange interpolatie polynoom voor f op 0 en h: $f(0) = p(0)$ en $f(h) = p(h)$ en p is van graad hoogstens 1. Dan geldt voor iedere $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - p(x) = x(x - h)\frac{1}{2!} f''(\xi) \quad \text{voor een zekere } \xi \text{ tussen } x, \ 0 \text{ en } h.$$

Voor $x \in [0, h]$ is $|x(1 - x)| \leq \frac{1}{2} h(\frac{1}{2} h - h)| = \frac{1}{4} h^2$ en is dus

$$|f(x) - p(x)| = \frac{1}{8} h^2 |f''(\eta)| \quad \text{voor een zekere } \eta \in [0, h].$$

Verder is, voor $x \in \{-h, 0, h, 2h\}$, $|x(x - h)| \leq 2h^2$ (nl., achtereenvolgens $\leq 2h^2, 0, 0, 2h^2$) en is

$$\max\{|f(t) - p(t))| \,\big|\, t = -h, 0, h, 2h\} \leq \frac{1}{2!} 2h^2 \max\{|f''(\xi)| \,\big|\, \xi \in [-h, 2h]\}.$$

Combineren levert

$$C \leq h^2 (\frac{1}{8} |f''(\eta)| + \max\{|f''(\xi)| \,\big|\, \xi \in [-h, 2h]\}) \leq h^2 \frac{9}{8} \max\{|f''(\xi)| \,\big|\, \xi \in [-h, 2h]\}.$$

Omdat f'' is continu wordt het maximum aangenomen voor een zekere $\xi \in [-h, 2h]$ en omdat voor $x \in [0, h]$, $[-h, 2h] \subset [x - 2h, x + 2h]$ volgt (7).

Concludeer dat er voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$|f(x) - S_h(f)(x)| \leq \frac{9}{8} h^2 |f''(\xi)| \quad \text{zekere } \xi \in [x - 2h, x + 2h]. \tag{8}$$

1 Oplossing. Bovenstaande argumenten kunnen, voor iedere $i \in \mathbb{Z}$, ook gegeven worden voor $[ih, ih + h]$ in plaats van voor $[0, h]$. Of, als alternatief bewijs, als $x \in [ih, ih + h]$, definiëer $g(y) = f(y + ih)$. Dan is $f(x) = g(x - ih)$ en is $y \equiv x - ih \in [0, h]$ en bovendien is (met $k = j - i$)

$$S_h(f)(x) = \sum_j f(jh) B_h(x - jh) = \sum_j g((j - i)h) B_h(x - ih - (j - i)h) = \sum_k g(kh) B_h(y - kh) = S_h(g)(y).$$

Pas nu (7) toe met g en y in plaats van, respectivelijk, f en x en merk op dat $|g''(\eta)| = |f''(\eta + ih)|$ met $\eta \in [y - 2h, y + 2h]$ en dus $\xi \equiv \eta + ih \in [x - 2h, x + 2h]$.

Puntentelling.

Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.

Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 3.