

Tentamen Numerieke Wiskunde

donderdag, 29 januari 2015, 9.00–12.00

1. Zet op ieder vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel bovendien nog je studentnummer.
2. Je mag het dictaat gebruiken, de uitwerkingen van de opgaven echter niet. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt geef dan duidelijk aan welk resultaat (nummer, pagina, etc.). Resultaten uit een vorig onderdeel mag je gebruiken ook al lukte het je niet om dat onderdeel te bewijzen.
3. Geef bij het beantwoorden van de vragen een duidelijke argumentatie (ook als dat niet expliciet gevraagd wordt).
4. $f \equiv g$ betekent 'f is per definitie gelijk aan g'. Met 'f is een gladde functie' bedoelen we dat alle afgeleiden van f die je in jouw formules tegenkomt bestaan en continu zijn.
5. Succes.

1. We willen van een gladde functie f op \mathbb{R} de waarde $f''(0)$ berekenen. Van f en van f' zijn, voor $h > 0$, de waarden in $-h$, 0 en h bekend. We proberen een nauwkeurige benadering te vinden door

$$D_{1,h}(f) \equiv \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2} \quad \text{en} \quad D_{2,h}(f) \equiv \frac{f'(h) - f'(-h)}{2h}, \quad (1)$$

met geschikte $\alpha \in \mathbb{R}$ te combineren tot de formule

$$D_h(f) \equiv \alpha D_{1,h}(f) + (1 - \alpha) D_{2,h}(f). \quad (2)$$

Zij $R_h(f) \equiv f''(0) - D_h(f)$ de fout. De formule is exact voor f als $R_h(f) = 0$.

(a) Laat zien dat, voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$, $R_h(f) = \mathcal{O}(h^2)$ voor $h \rightarrow 0$ en dat de formule exact is voor alle oneven polynomen.

2 **Oplissing.** Combineer formule (2) en (23) uit het dictaat om $R_h(f) = \mathcal{O}(h^2)$ voor $h \rightarrow 0$ te bewijzen. Uit deze formules volgt ook dat $R_h(p) = \alpha[p''(0) - D_{1,h}(p)] + (1 - \alpha)[p''(0) - D_{2,h}(p)] = 0$ in geval p een polynoom is van graad ≤ 2 .

Als f oneven is en $f(0) = 0$ dan is $D_{1,h}(f) = 0$, immers $f(-h) = -f(h)$. Verder is in dit geval f' even en volgt uit $f'(-) = f'(h)$ dat $D_{2,h}(f) = 0$. Dus $D_h(f) = 0$. Als p een oneven polynoom is, dan is $p(0) = 0$ en dus is $D_h(p) = 0$. Verder is p'' oneven en dus $p''(0) = 0$. Dus $R_h(p) = 0$.

(b) Bepaal α zodat de formule exact is voor polynomen van zo hoog mogelijke graad, d.w.z., $p''(0) = D_h(p)$ voor alle polynomen p van graad $\leq k$ met k zo groot mogelijk. Welke waarde heeft k dan?

3 **Oplissing.** Volgens a) kunnen we ons beperken tot $p(x) = x^4$, $p(x) = x^6$, etc.: de formules zijn linear in f . Dus als we exactheid hebben voor $p(x) = x^4$ dan hebben we exactheid voor alle polynomen van graad ≤ 5 , etc..

Welnu $R_h(x^4) = 0 - D_h(p) = -\alpha(2h^4/h^2) - (1 - \alpha)(2 \cdot 4h^3)/(2h) = (2\alpha - 4)h^2 = 0$ dan en slechts dan als $\alpha = 2$. Met $\alpha = 2$ is $R_h(x^6) = -2h^4 \neq 0$. Met $\alpha = 2$ hebben we exactheid voor alle polynomen van graad ≤ 5 en hebben geen exactheid voor $p(x) = x^6$. Kortom $k = 5$.

Neem verder voor α de optimale waarde.

(c) Bewijs dat

$$R_h(f) = -\frac{2}{6!}h^4 f^{(6)}(0) + \mathcal{O}(h^5) \quad (h \rightarrow 0). \quad (3)$$

(Hint: als, voor $m \geq 3$, $f(h) = \mathcal{O}(h^m)$ en $f'(h) = \mathcal{O}(h^{m-1})$ dan $D_h(f) = \mathcal{O}(h^{m-2})$. Dit geldt overigens voor iedere α .)

3 **Oplissing.** $f(x) = p(x) + \frac{1}{6!}x^6 f^{(6)}(0) + g(x)$ met $g''(0) = 0$, $g(x) = \mathcal{O}(x^7)$ en $g'(x) = \mathcal{O}(h^6)$ en p het 5-de graads Taylor polynoom voor f rond 0. Dus $R_h(f) = R_h(p) + \frac{1}{6!}R_h(x^6)f^{(6)}(0) + R_h(g) = -\frac{2}{6!}h^4 f^{(6)}(0) + \mathcal{O}(h^5)$. Als $|f(h)| \leq Ch^m$ dan is $|D_{1,h}(f)| \leq 4Ch^m/h^2 = 4Ch^{m-2} = \mathcal{O}(h^{m-2})$. Evenzo $D_{2,h}(f) = \mathcal{O}(h^{m-2})$ als $f'(h) = \mathcal{O}(h^{m-1})$.

Stel dat we alleen over de berekende waarden $f^*(x)$ beschikken met fout $\varepsilon(x) \equiv f(x) - f^*(x)$ en van ε is bekend dat $\varepsilon(x) = h^5 g(x) + \mathcal{O}(h^6)$ voor een gladde, maar onbekende, functie g . Verder voldoet f aan de differentiaalvergelijking $f'(x) = F(x, f(x))$, met F een bekende

gladde functie. Hiermee rekenen we $f'(x)$ uit en $\varepsilon(x)$ leidt tot een fout $\delta(x)$ op $f'(x)$. Verdere rekenfouten negeren we (zijn verwaarloosbaar).

(d) Laat zien dat $\delta(x) = h^5 \tilde{g}(x) + \mathcal{O}(h^6)$, waarbij \tilde{g} 'n gladde functie is.

- 1 Oplossing. $F(x, f(x) + \varepsilon(x)) = F(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\varepsilon(x) + \mathcal{O}(\varepsilon(x)^2) = f'(x) + \delta(x) + \mathcal{O}(h^{10})$ met $\delta \equiv \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\varepsilon(x) = h^5 \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))g(x) + \mathcal{O}(h^6)$.

In plaats van $f(x)$ en $f'(x)$ in $x = -h, 0, h$ gebruiken we in de berekening van $D_h(f)$ de met fout belaste waarden. Het resultaat noteren we met $D_h^*(f)$ met fout $R_h^*(f) \equiv f''(0) - D_h^*(f)$. Zijn de volgende twee uitspraken correct voor $h \rightarrow 0$?

$$(i) \quad R_h^*(f) = -\frac{2}{6!}h^4 f^{(6)}(0) + \mathcal{O}(h^5), \quad (ii) \quad R_h^*(f) = \mathcal{O}(h^4). \quad (4)$$

- 1 Oplossing. $R_{1,h}(h^5 g) = \mathcal{O}(h^7)$ (zie (a)) en $R_{2,h}(h^5 \tilde{g}) = \mathcal{O}(h^7)$. Deze component van de fout ‘‘verdwijnt’’ in de $\mathcal{O}(h^5)$ term in formule (3). Echter de $\mathcal{O}(h^6)$ term in $\varepsilon(x)$ levert op zijn best in $R_{1,h}^*(f)$ een $\mathcal{O}(h^4)$ term (omdat we in het differentie quotient door h^2 delen (net als in (c))). De $\mathcal{O}(h^6)$ term in $\delta(x)$ levert in $R_{2,h}^*(f)$ een $\mathcal{O}(h^5)$ term (hier delen we in het differentie quotient door h). Dus (ii) is correct. Omdat de $\mathcal{O}(h^6)$ term in $\varepsilon(x)$ geen bekende structuur heeft, zou het kunnen dat de resulterende $\mathcal{O}(h^4)$ term in $R_{1,h}^*(f)$ in $R_h^*(f)$ domineert. We kunnen dus niet stellen dat (i) correct is.

2. Beschouw, voor $\varepsilon = e^{-a} \in [0, e)$ en de natuurlijke logaritme \ln , de integraal

$$I_\varepsilon \equiv \int_\varepsilon^{1/e} f(t) dt = \int_1^a g(x) dx \quad \text{voor} \quad f(t) \equiv -\frac{1}{\ln(t)} \quad \text{en} \quad g(x) \equiv \frac{e^{-x}}{x}.$$

We willen I_ε numeriek bepalen middels de gerepeteerde trapezium regel (gTR).

(a) Laat zien dat de twee integralen aan elkaar gelijk zijn en dat ze bestaan, ook voor $\varepsilon = 0$. Toepassing van de gTR geeft problemen geval $\varepsilon = 0$. Waarom?

Laat zien dat voor $\varepsilon > 0$, $|I_0 - I_\varepsilon| \leq \varepsilon$ en dat de gTR zondermeer toepasbaar is om I_ε uit te rekenen.

- 2 Oplossing. Pas substitutie van variabele toe: neem $t = e^{-x}$. Dan is $-dt = e^{-x} dx$ en $\ln(t) = -x$. Omdat $g(x) \leq e^{-x}$ voor $x \geq 1$ is $0 \leq 1/x \leq 1$ en dus $0 \leq \int_1^\infty g(x) dx \leq \int_1^\infty e^{-x} dx = e^{-1} < \infty$ en bestaan de integralen (als oneigenlijke Riemann integraal). Voor $a = \infty$ is de gTR niet toepasbaar: voor g zouden we een ∞ lang integratie interval moeten opsplitsen in eindig veel stukken ter lengte h . Voor $\varepsilon = 0$ is de gTR strikt genomen wel toepasbaar: $\ln(0) = \infty$ en dus is $f(0) = 0$. Echter om de computer foutloos $f(0)$ te laten uitrekenen is extra zorg nodig. $0 \leq I_0 - I_\varepsilon = \int_0^\varepsilon f(t) dt = \int_a^\infty g(x) dx \leq \int_a^\infty e^{-x} dx = e^{-a} = \varepsilon$. Voor I_ε hebben we voor f te maken met punten $x \in [\varepsilon, 1/e]$ waarvoor $-\ln(x)$ goed gedefinieerd is en > 0 , voor g hebben we met het begrensde interval $[1, a]$ te maken.

We nemen verder $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$. Voor $\varepsilon = 10^{-8}$ en $h = h_0/n$ krijgen we, met $h_0 \equiv \frac{1}{e} - \varepsilon$ voor f en $h_0 \equiv a - 1$ voor g , de volgende resultaten.

n	$T_h(f)$	n	$T_h(g)$
16	0.219133499162	16	0.223883367440
32	0.219275691802	32	0.220516856207
64	0.219337198626	64	0.219667684585
128	0.219363773680	128	0.219454904334

(b) Laat zien dat bovenstaande resultaten voor g passen bij een fout die evenredig is met h^2 .

- 1 Oplossing. Uitrekenen van de vertrouwensgetallen $V_h \equiv [T_{2h}(g) - T_{4h}(g)]/[T_h(g) - T_{2h}(g)]$ levert 3.96 en 3.99 en dat past aardig bij de verwachte waarde 4: immers $V_h = [(I - T_{4h}(g)) - (I - T_{2h}(g))]/[(I - T_{2h}(g)) - (I - T_h(g))] \approx [c(4h)^2 - c(2h)^2]/[c(2h)^2 - ch^2] = [4^2 - 2^2]/[2^2 - 1] = 2^2 = 4$.

Was dat te verwachten?

- 1 Oplossing. De foutterm in de gTR is $-\frac{1}{12}h^2[g'(a) - g'(1)] + \mathcal{O}(h^4)$. Omdat $g'(a) - g'(1) \approx -g'(1) = -2/e \neq 0$ is fout dus $\approx ch^2$ met $c \approx 1/(6e)$.

Schat de fout in de laatste benadering $T_h(g)$ van I .

- 1 Oplossing. De fout $I_\varepsilon - T_h(g)$ in de laatste benadering $T_h(g)$ is $\approx [T_h(g) - T_{2h}(g)]/3 \approx 7.110^{-5}$.

Stel dat we doorgaan met het verdubbelen van n , voor welke n verwacht je een fout $|I_\varepsilon - T_h(g)| \leq 10^{-8}$?

- 1 Oplossing. Bij halveren van h neemt de fout verder zeer waarschijnlijk af met een factor 4 en na ℓ keer halveren met een factor 4^ℓ . Dus ℓ moet zo zijn dat $7.110^{-5}/4^\ell \leq 10^{-8}$. Dit is zo voor $\ell = 7$, dus $n = 2^7 \cdot 2^7 = 2^{14} \approx 16\,000$.

(c) We verwachten dat de vertrouwensgetallen bij toepassen van de gTR op f met halverende rij stapgroottes naar 4 convergeren (waarom?).

- $\frac{1}{2}$ Oplossing. Als in b) uitgelegd is de fout in de gTR $-\frac{1}{12}h^2[f'(1) - f'(\varepsilon)] + \mathcal{O}(h^4)$. Omdat $f'(1) - f'(\varepsilon) \neq 0$ domineert voor h klein de eerste term.

De getallen in (5) lijken eerder bij een fout evenredig met h te passen. Waarom lijkt dat zo?

- $\frac{1}{2}$ Oplossing. $V_h(f)$ levert 2.312 en 2.314 en dat lijkt meer op 2 (de grootte die we zouden krijgen als de fout evenredig is met h) dan op 4.

Kan je verklaren waarom het fout gedrag slechter is dan verwacht?

- 1 Oplossing. $f'(\varepsilon)$ is zeer groot: $f'(\varepsilon) = 1/[a^2\varepsilon] = 10^8/(25^2)$. Waarschijnlijk moet h wel heel klein zijn voor dat de $\mathcal{O}(h^4)$ term in de fout in de gTR verwaarloosbaar is t.o.v. $-\frac{1}{12}h^2[f'(1) - f'(\varepsilon)]$. Hoe schat je de fout in de laatste benadering $T_h(f)$ van I ? Hoe betrouwbaar is deze schatting?

- 1 Oplossing. Het lijkt redelijk om aan te nemen dat $V_h(g) \in [2.32, 4]$ zit. Pas nu Stelling 3.4.1 toe met $a = 2.32$ en $b = 4$. Dit geef een boven- en beneden grens (dus betrouwbaarheidsinterval) voor de fout.

(d) Wat verwacht je van een Romberg schema in deze gevallen (hier hoeft je niets uit te rekenen, een discussie volstaat)?

- 1 Oplossing. Om het Romberg schema te kunnen toepassen moet de fout van de vorm $c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \dots$ zijn (in ieder geval van de vorm $\sum c_j h^{\alpha_j}$ met (α_j) stijgend). Het ziet er niet naar uit dat we voor f effectief zo'n reeks ontwikkeling hebben (tenzij h belachelijk klein is). Voor g hebben we dat wel. Voor f zal een Romberg schema geen verbetering te zien geven, voor g werkt een Romberg schema waarschijnlijk uitstekend (heel nauwkeurig resultaat al voor niet al te kleine h).

3. In deze opgave is f telkens een gladde functies op $[-1, +1]$.

We benaderen $I(f) \equiv \int_0^1 f(t) dt$ met de kwadratuurformule

$$Q(f) \equiv w_0 f(-a) + w_1 f(1-a), \quad \text{waarbij} \quad a \equiv \sqrt{\frac{1}{6}}, \quad w_0 \equiv \frac{1}{2} - a, \quad w_1 \equiv \frac{1}{2} + a.$$

Zij $R(f) \equiv \int_0^1 f(t) dt - Q(f)$ de restterm. De formule is *exact* voor f als $R(f) = 0$.

De formule is exact voor alle tweede graads polynomen, maar niet voor alle derde graads polynomen. Dit hoeft je niet aan te tonen, maar mag je wel gebruiken.

(a) Bewijs met behulp van tweede graads interpolatie dat er een $c \in \mathbb{R}$ is en een $k \in \mathbb{N}$ zodat

$$R(f) = c f^{(k)}(\xi) \quad \text{voor zekere } \xi \in [-a, 1].$$

(Hint: gebruik een f' -waarde.) Laat zien dat $k = 3$ en dat c onafhankelijk is van f .

- 4 Oplossing. Zij p een polynoom van graad 2 zodat $p(-a) = f(-a)$, $p(1-a) = f(1-a)$ en $p'(1-a) = f'(1-a)$. Het bestaan van zo'n polynoom volgt uit . Verder geldt volgens dat, voor iedere $x \in [0, 1]$,

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{3!}(x+a)(x-1+a)^2 f^{(3)}(\xi) \quad \text{voor zekere } \xi \in [-a, 1]$$

Omdat Q exact is voor polynomen van graad ≤ 2 hebben we dat $I(p) = Q(p)$. Omdat f en p samenvallen op $-a$ en $1-a$ geldt $Q(p) = Q(f)$. Dus

$$R(f) = I(f) - Q(f) = I(f) - I(p) = I(f - p) = \int_0^1 \frac{1}{3!}(x+a)(x-1+a)^2 f^{(3)}(\xi) dx = f^{(3)}(\eta)c$$

met

$$c \equiv \int_0^1 \frac{1}{3!}(x+a)(x-1+a)^2 dx.$$

In de laatste gelijkheid hebben we gebruik dat $(x+a)(x-1+a)^2 > 0$ voor alle $x \in [0, 1]$, $x \neq 1-a$ (zie). Hier volgt ook uit dat $c > 0$, c onafhankelijk f en $k = 3$.

(b) Geef, voor $n \in \mathbb{N}$, de n -maal gerepeteerde kwadratuurformule $Q_n(f)$ op $[0, 1]$ (voor de stapgrootte h geldt dus $nh = 1$). (Hint: stel eerst een versie van Q en R op voor de integraal $\int_0^h f(t) dt$.)

2 Oplossing. Definieer $g(x) \equiv f(hx)$. Dan geldt

$$\int_0^h f(t) dt = \langle t = hx \rangle = h \int_0^1 g(x) dx = hw_0 f(-ah) + hw_1 f(h-ha) + h^4 f^{(3)}(h\eta)$$

voor zekere $\eta \in [-a, 1]$. Hierbij hebben we gebruikt dat $g^{(3)}(x) = h^3 f^{(3)}(hx)$. Evenzo geldt, met $t_i \equiv ih$, dat

$$\int_{t_i}^{t_i+h} f(t) dt = hw_0 f(t_i - ah) + hw_1 f(t_i + h - ha) + h^4 f^{(3)}(t_i + h\eta_i)$$

zekere $\eta_i \in [-a, 1]$. Dus

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_i+h} f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} (hw_0 f(t_i - ah) + hw_1 f(t_{i+1} - ha) + h^4 f^{(3)}(t_i + h\eta_i)) :$$

$$Q_n(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} w_0 f(t_i - ah) + w_1 f(t_{i+1} - ha) \quad \text{en} \quad R_n(f) = h^4 \sum_{i=0}^{n-1} f^{(3)}(t_i + h\eta_i)$$

(c) Toon aan dat

$$R_n(f) \equiv \int_0^1 f(t) dt - Q_n(f) = ch^3 \int_0^1 f^{(3)}(t) dt + \mathcal{O}(h^4) \quad \text{voor } h \rightarrow 0.$$

2 Oplossing. Merk op dat $f^{(3)}(t_i + h\eta_i) = f^{(3)}(t_i) + \mathcal{O}(h)$

$h \sum_{i=0}^{n-1} f^{(3)}(t_i + h\eta_i) = h \sum_{i=0}^{n-1} f^{(3)}(t_i) + h \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}(h)$. De eerste term is een Riemann som voor de integraal $\int_0^1 f^{(3)} dt$, de tweede term is $\mathcal{O}(h)$.

(d) Geef (als je dat nog niet in (b) gedaan hebt) voor $Q_n(f)$ een uitdrukking waarmee je $Q_n(f)$ zo efficiënt mogelijk kunt uitrekenen. Vergelijk deze formule met de gerepeteerde trapeziumregel (bespreek voor en nadelen voor praktisch gebruik). Maakt het nog uit of je met een vaste h werkt (van te voren zo gekozen dat de fout voldoende klein is) of dat je met automatische integratie de computer een geschikte h laat bepalen?

2 Oplossing. Merk op dat $w_1 f(t_{i+1} - ha) + w_0 f(t_{i+1} - ha) = f(t_{i+1} - ha)$: in de sommatie voor Q_n kunnen telkens twee termen samengenomen worden, behalve voor de eerste en de laatste term:

$$Q_n(f) = h[w_0 f(-ah) + f(h-ha) + f(2h-ah) + \dots + f(1-h-ah) + w_1 f(1-ah)].$$

Als we voor de gerepeteerde trapeziumregel en de nieuwe regel dezelfde h gebruiken dan moeten in beide formules evenveel functie waarden uitgerekend worden. De fout in Q_n is echter $\mathcal{O}(h^3)$, terwijl die in de gerepeteerde trapeziumregel $\mathcal{O}(h^2)$ is. Voor kleinere h heeft Q_n de voorkeur. Als we een geschikte h proberen te vinden door stapgrootte halvering en foutschatting dan wint de trapeziumregel het (zeker als we een Rombergschema gebruiken), omdat we in de gerepeteerde trapeziumregel de waarden voor h kunnen gebruiken in de berekening voor $h/2$. Omdat $ih - ah$ niet samenvalt met $jh/2 - ah/2$ kunnen we in Q_n geen functie-waarden voor h gebruiken bij $h/2$.

Puntentelling.

Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.

Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 3.