Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules mag je zonder bewijs gebruiken. Het tentamen bestaat uit 4 vragen die elk even zwaar meetellen. Je hebt voor dit tentamen 3 uur de tijd, succes!

Handige formules en

- Gedeelde differenties:

$$f[x_i] = f(x_i),$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i},$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\ \xi \in [x_0, x_n].$$

- Interpolatie:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i),$$

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- Integratie:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)(b-a) + \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a)+f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

- Vaste punt iteratie: De iteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = M\mathbf{x}_k,$$

convergeert als $\rho(M) < 1$ waarbij $\rho(M)$ de spectrale radius van M is.

vraag 1 - nulpuntsbepaling We willen het nulpunt, x_*, vinden van de functie $f(x) = \sin(x) - x\cos(x)$.

a) Laat zien dat er een nulpunt in het interval $(\pi, 2\pi)$ ligt. We noemen dit nulpunt x_*. Beargumenteer ook dat er maar één nulpunt in dit interval is.

b) Laat zien dat x_* een vast punt is van $g(x) = \tan(x)$ maar dat de bijbehorende vastepuntiteratie *niet* convergeert.

c) Laat zien dat de vastepuntiteratie $x_{k+1} = x_k + \omega f(x_k)$ naar x_* convergeert wanneer $\omega \leq 1/(\pi)$.

Vraag 2 - Stelsels vergelijkingen We willen het stelsel vergelijkingen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oplossen met de volgende methode

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \omega_k^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$

waarbij A een $n \times n$ matrix is en ω_k zijn gegeven. We nemen aan dat de matrix A n eigenvectoren $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ heeft met bijbehorende eigenwaarden $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}$. We noemen de oplossing $\mathbf{x}_*$ zodat $A\mathbf{x}_* = \mathbf{b}$.

a) Laat zien dat de fout $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*$ voldoet aan

$$\mathbf{e}_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \left(I - \omega_k^{-1} A\right)\right) \mathbf{e}_0.$$

b) Laat zien dat de iteratie in één stap convergeert wanneer $\mathbf{e}_0$ een eigenvector van A is én ω_0 de bijbehorende eigenwaarde is.

c) We kiezen nu $\omega_k = \lambda_k$. Beargumenteer nu dat de iteratie in maximaal n iteraties convergeert voor een willekeurige beginfout $\mathbf{e}_0$. *Hint: schrijf de beginfout als lineare combinatie van de eigenvectoren.*

vraag 3 - Numerieke differentiatie We willen de tweede afgeleide van een functie f op het punt x benaderen met de volgende eindige differentie benadering

$$f''(x) \approx \delta_h^2 f(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$

a) Laat zien dat $f''(x) - \delta_h^2 f(x) = Ch$ en geef een uitdrukking voor C

b) We bekijken nu de functie $g(x) = \sin(\pi x)$ op het interval $\in [0, 1]$. Geef een bovengrens voor de fout $e(x) = |g''(x) - \delta_h^2 g(x)|$.

c) We willen nu een betere benadering vinden door de benaderingen met stapgrootte h en $h/2$ te combineren:

$$\Delta_h^2 f = \alpha \delta_h^2 f(x) + \beta \delta_{h/2}^2 f(x).$$

Geef waarden voor α en β zodat $f''(x) - \Delta_h^2 f = \mathcal{O}(h^2)$.

vraag 4 - Differentiaalvergelijkingen De *impliciete* midpunt methode voor een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ is gegeven door

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f\left(\frac{u_{n+1} + u_n}{2}\right).$$

a) Laat zien dat we de methode ook kunnen schrijven als als

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f\left(u_n + \frac{\Delta t}{2} f\left(u_n + \frac{\Delta t}{2} f\left(u_n + \Delta t f\left(\frac{u_{n+1} + u_n}{2}\right)\right)\right)\right)$$

b) Laat zien dat dit een methode van orde twee is, d.w.z. dat $u(t) - u_n = \mathcal{O}(\Delta t^3)$.

c) Geef een uitdrukking voor het stabiliteitsgebeid van deze methode.