Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules mag je zonder bewijs gebruiken. Het tentamen bestaat uit 4 vragen die elk even zwaar meetellen. Je hebt voor dit tentamen 3 uur de tijd, succes!

Handige formules en

- Gedeelde differenties:

$$f[x_i] = f(x_i),$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i},$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\ \xi \in [x_0, x_n].$$

- Interpolatie:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i),$$

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- Integratie:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)(b-a) + \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a)+f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

- Vaste punt iteratie: De iteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = M\mathbf{x}_k,$$

convergeert als $\rho(M) < 1$ waarbij $\rho(M)$ de spectrale radius van M is.

vraag 1 - nulpuntsbepaling We willen het nulpunt, x_*, vinden van de functie $f(x) = \sin(x) - x\cos(x)$.

a) Laat zien dat er een nulpunt in het interval $(\pi, 2\pi)$ ligt. We noemen dit nulpunt x_*. Beargumenteer ook dat er maar één nulpunt in dit interval is.

> **antwoord** We zien dat $f(\pi) = \pi$ en $f(2\pi) = -\pi$ dus daartussen ligt een nulpunt. Verder zien we dat $f'(x) = x\sin(x)$ negatief is op dit interval; de functie is dus monotoon dalend en kan maar één nulpunt hebben.

b) Laat zien dat x_* een vast punt is van $g(x) = \tan(x)$ maar dat de bijbehorende vastepuntiteratie *niet* convergeert.

> **antwoord** Het nulpunt voldoet aan $\sin(x_*) = x_*\cos(x_*)$. Deel beide kanten door x_* en we krijgen $x_* = \tan(x_*)$. De vast punt iteratie convergeert niet omdat $|g'(x)| > 1$.

c) Laat zien dat de vastepuntiteratie $x_{k+1} = x_k + \omega f(x_k)$ naar x_* convergeert wanneer $\omega \leq 1/(\pi)$.

> **antwoord** We laten eerst zien dat het nulpunt van f een vast punt is van deze vastepuntiteratie; als $f(x_k) = 0$ krijgen we $x_{k+1} = x_k$. Nu kijken we naar de afgeleide: $1 + \omega f'(x) = 1 + \omega x\sin(x)$. Op het interval $(\pi, 2\pi)$ hebben we $1 - \omega 2\pi < 1 + \omega f'(x) < 1$. Als $\omega \leq 1/\pi$ hebben we $|1 + \omega f'(x)| < 1$.

Vraag 2 - Stelsels vergelijkingen We willen het stelsel vergelijkingen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oplossen met de volgende methode

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \omega_k^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$

waarbij A een $n\times n$ matrix is en ω_k zijn gegeven. We nemen aan dat de matrix A n eigenvectoren $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ heeft met bijbehorende eigenwaarden $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}$. We noemen de oplossing $\mathbf{x}_*$ zodat $A\mathbf{x}_* = \mathbf{b}$.

a) Laat zien dat de fout $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*$ voldoet aan

$$\mathbf{e}_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (I - \omega_k^{-1} A)\right)\mathbf{e}_0.$$

> **antwoord** We krijgen $\mathbf{e}_{k+1} - \mathbf{x}_* = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* + \omega_k^{-1} A(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_k)$ ofwel $\mathbf{e}_{k+1} = (I - \omega_k^{-1} A)\mathbf{e}_k$. Herhaardelijk toepassen geeft de gevraagde uitdrukking.

b) Laat zien dat de iteratie in één stap convergeert wanneer $\mathbf{e}_0$ een eigenvector van A is én ω_0 de bijbehorende eigenwaarde is.

> **antwoord** In dat geval hebben we $\mathbf{e}_1 = (I - \omega_k^{-1} A)\mathbf{e}_0 = (1 - \omega_0^{-1}\omega_0)\mathbf{e}_0 = 0$.

c) We kiezen nu $\omega_k = \lambda_k$. Beargumenteer nu dat de iteratie in maximaal n iteraties convergeert voor een willekeurige beginfout $\mathbf{e}_0$. *Hint: schrijf de beginfout als lineare combinatie van de eigenvectoren.*

antwoord We schrijven de beginfout als combinatie van de eigenvectoren $\mathbf{e}_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{v}_i$ waarbij $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$. We passen nu b) herhaaldelijk toe en zien dat er iedere iteratie minimaal een foutcomponent wegvalt, namelijk degene met eigenwaarde ω_k. Na maximaal n iteraties zijn alle fouten dus weg.

vraag 3 - Numerieke differentiatie We willen de tweede afgeleide van een functie f op het punt x benaderen met de volgende eindige differentie benadering

$$f''(x) \approx \delta_h^2 f(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$

a) Laat zien dat $f''(x) - \delta_h^2 f(x) = Ch$ en geef een uitdrukking voor C

antwoord Taylor:

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2} f''(x) + \frac{8h^3}{6} f'''(\xi_1),$$

en

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_2),$$

dus

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = h^2 f''(x) + \frac{h^3}{3}(4f'''(\xi_1) - f'''(xi_2)).$$

We vinden

$$f''(x) - \delta_h^2 f(x) = Ch,$$

met $C = (4f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2))/3 = f'''(\xi)$.

b) We bekijken nu de functie $g(x) = \sin(\pi x)$ op het interval $\in [0, 1]$. Geef een bovengrens voor de fout $e(x) = |g''(x) - \delta_h^2 g(x)|$.

antwoord We hebben $e(x) = g'''(\xi)h$, vinden $|e(x)| \leq \max_{\xi \in [0,1]} |g'''(\xi)|h = \pi^3 h$.

c) We willen nu een betere benadering vinden door de benaderingen met stapgrootte h en $h/2$ te combineren:

$$\Delta_h^2 f = \alpha \delta_h^2 f(x) + \beta \delta_{h/2}^2 f(x).$$

Geef waarden voor α en β zodat $f''(x) - \Delta_h^2 f = \mathcal{O}(h^2)$.

antwoord We ontwikkelen de fout een term verder

$$\delta_h^2 f(x) = f''(x) + hf'''(x) + \mathcal{O}(h^2),$$

en zien dat

$$\Delta_h^2 f = (\alpha + \beta) f''(x) + (\alpha + \beta/2) hf'''(x) + \mathcal{O}(h^2).$$

We zoeken α, β zodat $\alpha + \beta = 1$ en $\alpha + \beta/2 = 0$; $\alpha = -1$ en $\beta = 2$.

vraag 4 - Differentiaalvergelijkingen De *impliciete* midpunt methode voor een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ is gegeven door

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f\left(\frac{u_{n+1} + u_n}{2}\right).$$

a) Laat zien dat we de methode ook kunnen schrijven als als

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f\left(u_n + \frac{\Delta t}{2} f\left(u_n + \frac{\Delta t}{2} f\left(u_n + \Delta t f\left(\frac{u_{n+1} + u_n}{2}\right)\right)\right)\right)$$

antwoord We vullen de definitie van u_{n+1} weer in..

b) Laat zien dat dit een methode van orde twee is, d.w.z. dat $u(t) - u_n = \mathcal{O}(\Delta t^3)$.

antwoord We schrijven de exacte oplossing als

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \Delta t u'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} u''(t) + \mathcal{O}(\Delta t^3) = u(t) + \Delta t f(u(t)) + \frac{\Delta t^2}{2} f'(u(t))u'(t) + \mathcal{O}(\Delta t^3).$$

We schrijven nu eerste de numerieke methode als

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left(f(u_n) + \frac{\Delta t}{2} f(\ldots) f'(u_n) \right),$$

en passen nogmaals een Taylorbenadering toe op $f(\ldots)$:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left(f(u_n) + \frac{\Delta t}{2} f(u_n) f'(u_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right).$$

Dit geeft het gewenste resultaat.

c) Geef een uitdrukking voor het stabiliteitsgebeid van deze methode.

antwoord We passen de methode toe op de testvergelijking $u'(t) = \lambda u(t)$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t \lambda}{2} (u_{n+1} + u_n).$$

We krijgen nu

$$\left(1 - \frac{\Delta t \lambda}{2}\right) u_{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t \lambda}{2}\right) u_n,$$

ofwel

$$u_{n+1} = \frac{1 + \frac{\Delta t \lambda}{2}}{1 - \frac{\Delta t \lambda}{2}} u_n.$$

De methode is stabiel wanneer

$$|(1 + \frac{\Delta t \lambda}{2})| < |(1 - \frac{\Delta t \lambda}{2})|,$$

het stabiliteitsgebied is gegeven door $\{z \in \mathbb{C} | \Re(z) < 0\}$.