Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules mag je zonder bewijs gebruiken. Het tentamen bestaat uit 4 vragen die elk even zwaar meetellen. Je hebt voor dit tentamen 3 uur de tijd, succes!

Handige formules en

- Gedeelde differenties:

$$f[x_i] = f(x_i),$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i},$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\ \xi \in [x_0, x_n].$$

- Interpolatie:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i),$$

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- Integratie:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)(b-a) + \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a) + f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

- Vaste punt iteratie: De iteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = M\mathbf{x}_k,$$

convergeert als $\rho(M) < 1$ waarbij $\rho(M)$ de spectrale radius van M is.

vraag 1 - nulpuntsbepaling We willen het nulpunt, x_*, vinden van de functie $f(x) = xe^x - 1$.

a) Laat zien dat het nulpunt in het interval [0,1] ligt. Beargumenteer ook dat dit het enige nulpunt van f is

b) Laat zien dat de vastepuntiterate

$$x_{k+1} = e^{-x_k},$$

convergeert naar het nulpunt van f voor alle $x_0 > 0$.

c) Omdat we de e-macht niet exact kunnen uitrekenen gebruiken we de volgende benadering $e^{-x} \approx 1 - x + \frac{1}{2}x^2$. Bepaal of de bijbehorende vastepuntiteratie convergeert en zoja waarnaartoe. *Hint: er zijn twee vaste punten; bekijk ze allebij.*

Vraag 2 - Stelsels vergelijkingen We hebben een 2×2 matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

en willen het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ iteratief oplossen.

a) We bekijken een aangepaste vaste-punt iteratie:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + D^{-1}\left(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k\right),$$

waarbij $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Laat zien dat deze convergeert waneer $|bc| < |ad|$.

b) Laat zien dat we fout $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*$ kunnen schrijven als

$$\mathbf{e}_k = (I - D^{-1}A)^k \mathbf{e}_0.$$

c) Neem aan dat $\mathbf{e}_0$ een eigenvector is van $D^{-1}A$ en bepaal hoeveel iteraties nodig zijn om een tolerantie van ϵ te bereiken, ofwel hoe groot moet k (minstens) zijn zodat $\|\mathbf{e}_k\|_2 \leq \epsilon$.

Vraag 3 - Integratie We willen integralen benaderen van de vorm

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

De standaard benadering met 2 punten is gegeven door

$$I_1 = f(-1) + f(1).$$

We bekijken in deze opgaven ook de volgende benadering

$$I_2 = f(-\alpha) + f(\alpha),$$

met $\alpha \in (0, 1]$.

a) Laat zien dat fout in de eerste benadering is gegeven door

$$I - I_1 = -\frac{2}{3} f''(\xi),$$

met $\xi \in [-1, 1]$.

b) We definieren de interpolant op de punten $\{-1, -\alpha, \alpha, 1\}$:

$$p_3(x) = f[-\alpha] + f[-\alpha, \alpha](x+\alpha) + f[-\alpha, \alpha, -1](x+\alpha)(x-\alpha) + f[-\alpha, \alpha, -1, 1](x+\alpha)(x-\alpha)(x+1).$$

Geef een uitdrukking voor de fout $e_3(x) = f(x) - p_3(x)$.

c) Laat zien dat we voor $\alpha = \sqrt{1/3}$ geldt dat:

$$\int_{-1}^{1} p_3(x)\mathrm{d}x = f(-\alpha) + f(\alpha).$$

d) Gegeven dat $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, laat zien dat we voor $\alpha = \sqrt{1/3}$ de volgende uitdrukking voor de fout krijgen:

$$I - I_2 = \frac{8a}{}$$

vraag 4 - Differentiaalvergelijkingen Ralston's methode voor het oplossen van een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ is gegeven door

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{4}\left(f(u_n) + 3f(u_n + (2\Delta t/3) f(u_n))\right).$$

a) Laat zien dat dit een methode van orde twee is, d.w.z. dat $u(t) - u_n = \mathcal{O}(\Delta t^3)$.

b) Geef een uitdrukking voor het stabiliteitsgebeid van deze methode