Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules mag je zonder bewijs gebruiken. Het tentamen bestaat uit 4 vragen die elk even zwaar meetellen. Je hebt voor dit tentamen 3 uur de tijd, succes!

Handige formules en

- Gedeelde differenties:

$$f[x_i] = f(x_i),$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i},$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\ \xi \in [x_0, x_n].$$

- Interpolatie:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots x_n] \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i),$$

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] \prod_{i=0}^{n}(x - x_i),$$

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

- Integratie:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)(b-a) + \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a)+f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

- Vaste punt iteratie: De iteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = M\mathbf{x}_k,$$

convergeert als $\rho(M) < 1$ waarbij $\rho(M)$ de spectrale radius van M is.

vraag 1 - nulpuntsbepaling We willen het nulpunt, x_*, vinden van de functie $f(x) = xe^x - 1$.

a) Laat zien dat het nulpunt in het interval [0,1] ligt. Beargumenteer ook dat dit het enige nulpunt van f is

> **antwoord** Omdat $f(0)f(1) < 0$ (tekenwisseling) is er een nulpunt $x_* \in [0,1]$. Verder is $f'(x) = e^x + xe^x$ positief voor $x > 0$ en dus zijn er geen andere nulpunten op de positieve as. Voor $x < 0$ zien we dat $f(x) < 0$ dus er zijn geen nulpunten op de negatieve as.

b) Laat zien dat de vastepuntiterate

$$x_{k+1} = e^{-x_k},$$

convergeert naar het nulpunt van f voor alle $x_0 > 0$.

> **antwoord** Eerste laten we zien dat een vast punt van $g(x) = e^{-x}$ een nulpunt is van f: $x = e^{-x}$ kan worden omgeschreven als $xe^x = 1$. Daarna gebruiken we het vastepunttheorema: omdat $|g'(x)| = |e^{-x}| < 1$ voor alle $x > 0$ is het vaste punt uniek en convergeert de iteratie naar het vaste punt van g voor alle $x > 0$ en dus naar het nulpunt van f.

c) Omdat we de e-macht niet exact kunnen uitrekenen gebruiken we de volgende benadering $e^{-x} \approx 1 - x + \frac{1}{2}x^2$. Bepaal of de bijbehorende vastepuntiteratie convergeert en zoja waarnaartoe. *Hint: er zijn twee vaste punten; bekijk ze allebij.*

> **antwoord** krijgen nu de volgende vastepuntiteratie
>
> $$x_{k+1} = h(x_k),$$
>
> met $h(x) = 1-x+\frac{1}{2}x^2$. Een vast punt voldoet aan $x^2-4x+2 = 0$, en zijn gegeven door $x_\pm = 2\pm\sqrt{2}$. De afgeleide is gegeven door $h'(x) = 2x - 4$ en we zien dat de iteratie wel naar het eerste vaste punt kan convergeren omdat $|h'(x_-)| < 1$ maar niet naar het tweede omdat $|h(x_+)| > 1$.

Vraag 2 - Stelsels vergelijkingen We hebben een 2×2 matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

en willen het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ iteratief oplossen.

a) We bekijken een aangepaste vaste-punt iteratie:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + D^{-1}\left(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k\right),$$

waarbij $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Laat zien dat deze convergeert waneer $|bc| < |ad|$.

> **antwoord** We hebben
>
> $$D^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ c/d & 1 \end{pmatrix},$$
>
> met eigenwaarden $\lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{\frac{bc}{ad}}$. Daaruit volgt $\rho(I - D^{-1}A) = \sqrt{\frac{bc}{ad}}$ wat kleiner is dat 1 wanneer $|bc| < |ad|$.

b) Laat zien dat we fout $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*$ kunnen schrijven als

$$\mathbf{e}_k = (I - D^{-1}A)^k \mathbf{e}_0.$$

antwoord Schrijf $\mathbf{b} = A\mathbf{x}_*$ en trek $\mathbf{x}_*$ af van beide kanten. We krijgen nu

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{x}_k + D^{-1}A(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_k) = (I - D^{-1}A)\mathbf{e}_k.$$

Herhaaldelijk toepassen geeft het gevraagde resultaat.

c) Neem aan dat $\mathbf{e}_0$ een eigenvector is van $D^{-1}A$ en bepaal hoeveel iteraties nodig zijn om een tolerantie van ϵ te bereiken, ofwel hoe groot moet k (minstens) zijn zodat $\|\mathbf{e}_k\|_2 \leq \epsilon$.

antwoord Omdat $\mathbf{e}_0$ een eigenvector is van $D^{-1}A$ hebben we $(I - D^{-1}A)^k\mathbf{e}_0 = (1-\lambda)^k\mathbf{e}_0$. Dan volgt dat $\|\mathbf{e}_k\|_2 = |(1-\lambda)|^k\|\mathbf{e}_0\|_2 = |(1-\lambda)|^k = |\sqrt{bc/ad}|^k$. Hieruit vinden we $k > 2\frac{\log(\epsilon)}{\log(|\sqrt{bc/ad})}|$.

Vraag 3 - Integratie We willen integralen benaderen van de vorm

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

De standaard benadering met 2 punten is gegeven door

$$I_1 = f(-1) + f(1).$$

We bekijken in deze opgaven ook de volgende benadering

$$I_2 = f(-\alpha) + f(\alpha),$$

met $\alpha \in (0, 1]$.

a) Laat zien dat fout in de eerste benadering is gegeven door

$$I - I_1 = -\frac{2}{3} f''(\xi),$$

met $\xi \in [-1, 1]$.

antwoord We kunnen direct de formule van het voorblad toepassen. Alternatief: we construeren de interpolant $p_1(x) = f[-1] + f[-1,1](x+1)$ met foutterm $e_1(x) = f(x) - p_1(x) = f[-1,1,x](x+1)(x-1)$. Na integratie krijgen we

$$\int_{-1}^{1} p_1(x)\mathrm{d}x = f(-1) + f(1) = I_1.$$

We krijgen dus

$$I - I_1 = \int_{-1}^{1} e_1(x)\mathrm{d}x = f[-1,1,\eta]\int_{-1}^{1}(x^2-1)\mathrm{d}x = -\frac{2}{3} f''(\xi).$$

b) We definieren de interpolant op de punten $\{-1, -\alpha, \alpha, 1\}$:

$p_3(x) = f[-\alpha]+f[-\alpha,\alpha](x+\alpha)+f[-\alpha,\alpha,-1](x+\alpha)(x-\alpha)+f[-\alpha,\alpha,-1,1](x+\alpha)(x-\alpha)(x+1).$

Geef een uitdrukking voor de fout $e_3(x) = f(x) - p_3(x)$.

antwoord Uit de handige formules vinden we direct

$$e_3(x) = f[-\alpha,\alpha,-1,1,x](x^2-\alpha^2)(x^2-1) = \frac{f^(4)(\xi)}{4!}(x^2-\alpha^2)(x^2-1),$$

met $\xi \in [-1, 1]$.

c) Laat zien dat we voor $\alpha = \sqrt{1/3}$ geldt dat:

$$\int_{-1}^{1} p_3(x)\mathrm{d}x = f(-\alpha) + f(\alpha).$$

antwoord We integreren eerst $p_3(x)$:

$$\int_{-1}^{1} p_3(x)\mathrm{d}x = 2f[-\alpha] + 2\alpha f[-\alpha,\alpha] + f[-\alpha,\alpha,-1](2/3-2\alpha^2) + f[-\alpha,\alpha,-1,1](2/3-2\alpha^2).$$

Voor $\alpha = \sqrt{1/3}$ zien we dat de laatste 2 termen wegvallen. Uitschrijven van de gedeelde differenties $2f[-\alpha] + 2\alpha f[-\alpha,\alpha]$ geeft de gewenste uitdrukking.

d) Gegeven dat $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, laat zien dat we voor $\alpha = \sqrt{1/3}$ de volgende uitdrukking voor de fout krijgen:

$$I - I_2 = \frac{8a}{45}.$$

antwoord Met behulp van (b) en (c) vinden we dat

$$I - I_2 = \int_{-1}^{1} e_3(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{f^4(\xi)}{4!}(x^2 - \alpha^2)(x^2 - 1)\mathrm{d}x.$$

Vul in $\frac{f^4(\xi)}{4!} = a$. Uitwerken van de integraal geeft de gewenste uitdrukking.

vraag 4 - Differentiaalvergelijkingen Ralston's methode voor het oplossen van een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ is gegeven door

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{4}\left(f(u_n) + 3f(u_n + (2\Delta t/3)f(u_n))\right).$$

a) Laat zien dat dit een methode van orde twee is, d.w.z. dat $u(t) - u_n = \mathcal{O}(\Delta t^3)$.

antwoord Een Taylorbenadering van de exact oplossing is

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t f(u(t)) + \frac{\Delta t^2}{2}u''(t) + \frac{\Delta t^3}{6}u'''(\tau).$$

Invullen $u'(t) = f(u(t))$ en $u''(t) = f(u(t))f'(u(t))$ (de differentiaalvergelijking) geeft

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t f(u(t)) + \frac{\Delta t^2}{2}f'(u(t))f(u(t)) + \frac{\Delta t^3}{6}u'''(\tau).$$

Een Taylorbenadering van de methode geeft

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{4}\left(4f(u_n) + 2\Delta t f(u_n)f'(u_n) + \frac{2\Delta t^2 f(u_n)^2}{3}f''(\eta_n)\right).$$

We vinden nu dat

$$u(t + \Delta t) - u_{n+1} = \frac{\Delta t^3}{6}\left(u'''(\tau) - f(u_n)^2 f''(\eta_n)\right).$$

b) Geef een uitdrukking voor het stabiliteitsgebeid van deze methode

antwoord Om de stabiliteit te analyseren passen we de methode toe op de testvergelijking $u'(t) = \lambda u(t)$. We krijgen

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{4}\left(4\lambda u_n + 2\Delta t\lambda^2 u_n\right) = \left(1 + \lambda\Delta t + \frac{\lambda^2\Delta t^2}{2}\right)u_n.$$

De methode is stabiel als $|u_{n+1}| < |u_n|$ (voor $\lambda < 0$). Dit kan alleen als $|1 + \lambda\Delta t + \frac{\lambda^2\Delta t^2}{2}| < 1$. Het stabiliteitsgebied is dus gegeven door $\{z \,:\, |1 + z + z^2/2| < 1\}$.