Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- Gedeelde differenties ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$)

$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \xi \in [x_0, x_n].$$

- Interpolatie

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i),$$

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- Integratie

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f((a+b)/2) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \quad \text{(midpuntregel)},$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a) - f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad \text{(trapeziumregel)}.$$

- Middelwaardestelling: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a, b]$, dan is er een $\xi \in [a, b]$ waarvoor:

$$\int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Inverse van een 2×2 matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

- Vastepuntstelling: De iteratie

$$x_{k+1} = g(x_k),$$

met $x_0 \in [a, b]$ convergeert naar een vast punt $x_* \in [a, b]$ als $|g'| < 1$ op $[a, b]$. Als bovendien $g'(x_*) = 0$, dan convergeert de iteratie kwadratisch.

- Vastepuntiteratie voor lineare stelsels: De iteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$

convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

2 pt. **vraag 1 - niet-lineare vergelijkingen** We willen alle nulpunten vinden van de functie $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Hoe snel convergeert Newton's methode naar het nulpunt $x = 1$ indien we daar in de buurt beginnen? Idem voor het nulpunt $x = 0$.

b) Wat zijn de vaste punten van de vastepuntiteratie $x_{k+1} = x_k^{3/2}$ en voor welke beginwaarden $x_0 \geq 0$ worden deze in de limiet $k \to \infty$ bereikt? Geef ook aan hoe snel de convergentie is.

2 pt. **vraag 2 - interpolatie** De functie $f(k) = k!$ is alleen gedefinieerd voor $k \in \mathbb{N}$. We gaan nu, met behulp van interpolatie, $f(3/4)$ benaderen.

a) Stel een interpolant van graad 2 op met steunpunten $0, 1, 2$ en geef een benadering van $f(3/4)$.

b) Stel ook een interpolant van graad 3 op met steunpunten $0, 1, 2, 3$ en laat zien dat de derde afgeleide van f kan worden benaderd als

$$f'''(x) \approx f(3) - 3f(2) + 3f(1) - f(0) = 2.$$

c) Gebruik het resultaat uit b) om de fout in de benadering uit a) te benaderen. De fout is gegeven door

$$f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{6} x(x-1)(x-2),$$

dus

$$f(3/4) - p_2(3/4) \approx \frac{15}{192} = 0.078125.$$

3 pt. **vraag 3 - numerieke integratie** De eenvoudigste methode om een integraal te benaderen is de midpuntregel

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx I_1 = f\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

In deze opgave bekijken we de volgende gerelateerde benadering

$$I \approx I_2 = \frac{1}{2} f\left(\tfrac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} f\left(\tfrac{3}{4}\right),$$

die we krijgen door de integraal te splitsen en de midpuntregel 2 keer toe te passen.

a) Laat zien dat de fout in I_1 is gegeven door

$$I - I_1 = \frac{f''(\xi_1)}{24},$$

met $\xi_1 \in [0, 1]$.

b) Laat zien dat de fout in I_2 is gegeven door

$$I - I_2 = \frac{f''(\xi_2)}{96},$$

met $\xi_2 \in [0, 1]$.

c) Bepaal de coefficiënten α, β zodat $I_3 = \alpha I_1 + \beta I_2$ een benadering geeft die (op zijn minst) exact is voor polynomen van graad 2.

3 pt. **vraag 4 - differentiaalvergelijkingen** De haasje-over methode benadert de oplossing van een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ als volgt

$$\widetilde{u}_{n+1} = \widetilde{u}_{n-1} + 2\Delta t f(\widetilde{u}_n),$$

voor gegeven $\widetilde{u}_0$ en $\widetilde{u}_1$ en waar $\widetilde{u}_n$ dus een benadering is van $u(n\Delta t)$.

a) Laat zien dat de locale truncatiefout van de haasje-over methode is gegeven door

$$\widetilde{u}_n - u(n\Delta t) = C(\Delta t)^3,$$

en geef een uitdrukking voor de constante C.

b) De haasje-over methode is een tweestaps methode omdat we de oplossing op $n-1$ én n gebruiken om naar tijdstip $n+1$ te komen. Laat zien dat je de methode als Euler Forward voor een stelsel differentiaalvergelijkingen kan schrijven

$$\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_n \\ v_n \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} 0 \\ 2f(w_n) \end{pmatrix},$$

met $v_n = u_{n-1}$ en $w_n = u_n$.

c) Gebruik de uitdrukking in b) om te laten zien dat de haasje-over methode onvoorwaardelijk instabiel is.