Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- Gedeelde differenties ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$)

$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \, \xi \in [x_0, x_n].$$

- Interpolatie

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i),$$

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- Integratie

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a) f((a+b)/2) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \quad \text{(midpuntregel)},$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a) - f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad \text{(trapeziumregel)}.$$

- Middelwaardestelling: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a, b]$, dan is er een $\xi \in [a, b]$ waarvoor:

$$\int_a^b f(x) w(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Inverse van een 2×2 matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

- Vastepuntstelling: De iteratie

$$x_{k+1} = g(x_k),$$

met $x_0 \in [a, b]$ convergeert naar een vast punt $x_* \in [a, b]$ als $|g'| < 1$ op $[a, b]$. Als bovendien $g'(x_*) = 0$, dan convergeert de iteratie kwadratisch.

- Vastepuntiteratie voor lineare stelsels: De iteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$

convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

2 pt. **vraag 1 - niet-lineare vergelijkingen** We willen alle nulpunten vinden van de functie $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Hoe snel convergeert Newton's methode naar het nulpunt $x = 1$ indien we daar in de buurt beginnen? Idem voor het nulpunt $x = 0$.

antwoord Newton's methode is equivalent aan een vastepuntiteratie met de functie

$$g(x) = x - f(x)/f'(x) = x - \frac{x^3 - x^2}{3x^2 - 2x}.$$

Voor de convergentie kijken we naar de afgeleide

$$g'(x) = 1 - \frac{(3x^2 - 2x)^2 - (x^3 - x^2)(6x - 2)}{(3x^2 - 2x)^2} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{(2 - 3x)^2}\right).$$

We zien dat $g'(1) = 0$ dus verwachten we kwadratische convergentie naar dit punt. Verder zien we dat $g'(0) = 1/2$ dus lineare convergentie naar $x = 0$.

b) Wat zijn de vaste punten van de vastepuntiteratie $x_{k+1} = x_k^{3/2}$ en voor welke beginwaarden $x_0 \geq 0$ worden deze in de limiet $k \to \infty$ bereikt? Geef ook aan hoe snel de convergentie is.

antwoord De function $g(x) = x^{3/2}$ heeft als vaste punten $x = 0$ en $x = 1$. We hebben $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ en we zien dat $|g'(x)| < 1$ voor $x \in [0, \frac{4}{9}]$. De vaste puntiteratie convergeert dus niet naar $x = 1$ maar wel naar $x = 0$ als $0 < x_0 < 4/9$. De convergentie naar $x = 0$ is kwadratisch omdat $g'(0) = 0$.

2 pt. **vraag 2 - interpolatie** De functie $f(k) = k!$ is alleen gedefinieerd voor $k \in \mathbb{N}$. We gaan nu, met behulp van interpolatie, $f(3/4)$ benaderen.

a) Stel een interpolant van graad 2 op met steunpunten $0, 1, 2$ en geef een benadering van $f(3/4)$.

antwoord De interpolant is geven door

$$p_2(x) = f[0] + f[0,1]x + f[0,1,2]x(x-1) = 1 + \frac{1}{2}x(x-1),$$

en zo $p_2(3/4) = \frac{29}{32} = 0.90625$.

b) Stel ook een interpolant van graad 3 op met steunpunten $0, 1, 2, 3$ en laat zien dat de derde afgeleide van f kan worden benaderd als

$$f'''(x) \approx f(3) - 3f(2) + 3f(1) - f(0) = 2.$$

antwoord De interpolant is gegeven door:

$$p_3(x) = f[0]+f[0,1]x+f[0,1,2]x(x-1)+f[0,1,2,3]x(x-1)(x-2) = 1+\frac{1}{2}x(x-1)+\frac{1}{3}x(x-1)(x-2).$$

Als we de afgeleide van f benaderen met de afgeleide van p_3 krijgen we $f'''(x) \approx 6f[0,1,2,3] = f(3) - 3f(2) + 3f(1) - f(0) = 2$.

c) Gebruik het resultaat uit b) om de fout in de benadering uit a) te benaderen. De fout is gegeven door

$$f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{6}x(x-1)(x-2),$$

dus

$$f(3/4) - p_2(3/4) \approx \frac{15}{192} = 0.078125.$$

3 pt. **vraag 3 - numerieke integratie** De eenvoudigste methode om een integraal te benaderen is de midpuntregel

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx I_1 = f\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

In deze opgave bekijken we de volgende gerelateerde benadering

$$I \approx I_2 = \frac{1}{2} f\left(\tfrac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} f\left(\tfrac{3}{4}\right),$$

die we krijgen door de integraal te splitsen en de midpuntregel 2 keer toe te passen.

a) Laat zien dat de fout in I_1 is gegeven door

$$I - I_1 = \frac{f''(\xi_1)}{24},$$

met $\xi_1 \in [0, 1]$.

> **antwoord** Toepassen van de formule geeft direct het gewenste antwoord.

b) Laat zien dat de fout in I_2 is gegeven door

$$I - I_2 = \frac{f''(\xi_2)}{96},$$

met $\xi_2 \in [0, 1]$.

> **antwoord** Hier splitsen we de integraal in 2 delen en passen de formule toe:
>
> $$I = \int_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} f(\frac{3}{4}) + (1/2)^3 \frac{f''(\xi)}{24} + (1/2)^3 \frac{f''(\xi')}{24}.$$
>
> Hieruit volgt dat
>
> $$I - I_2 = \frac{1}{192}\left(f''(\xi) + f''(\xi')\right).$$
>
> Met de tussenwaardestelling weten we dat er een ξ_2 is zodat $f''(\xi_2) = (f''(\xi) + f''(\xi'))/2$, waarmee we het gevraagde resultaat krijgen.

c) Bepaal de coefficiënten α, β zodat $I_3 = \alpha I_1 + \beta I_2$ een benadering geeft die (op zijn minst) exact is voor polynomen van graad 2.

> **antwoord** We gebruiken een Richardson extrapolatie. Voor polynomen van graad 2 is de tweede afgeleiden constant, dus kunnen we de fout uitdrukken als
>
> $$I - I_1 = \frac{C}{24}, \quad I - I_2 = \frac{C}{96}.$$
>
> Invullen geeft
>
> $$I - I_3 = (1 - (\alpha + \beta))I + \alpha \frac{C}{24} + \beta \frac{C}{96}.$$
>
> De eis is dat deze fout nul is, dus zoeken we α, β zodat $\alpha + \beta = 1$ en $4\alpha + \beta = 0$, dus $\alpha = -\frac{1}{3}$ en $\beta = \frac{4}{3}$.

3 pt. **vraag 4 - differentiaalvergelijkingen** De haasje-over methode benadert de oplossing van een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ als volgt

$$\widetilde{u}_{n+1} = \widetilde{u}_{n-1} + 2\Delta t f(\widetilde{u}_n),$$

voor gegeven $\widetilde{u}_0$ en $\widetilde{u}_1$ en waar $\widetilde{u}_n$ dus een benadering is van $u(n\Delta t)$.

a) Laat zien dat de locale truncatiefout van de haasje-over methode is gegeven door

$$\widetilde{u}_n - u(n\Delta t) = C(\Delta t)^3,$$

en geef een uitdrukking voor de constante C.

antwoord De Taylorexpansie van de oplossing is:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t f(u(t)) + \frac{\Delta t^2}{2} f'(u(t))f(u(t)) + \frac{\Delta t^3}{6} u'''(\tau).$$

De Taylorexpansie van de benadering is

$$\widetilde{u}_{n+1} = \left(\widetilde{u}_n - \Delta t f(\widetilde{u}_n) + \frac{\Delta t^2}{2} f'(\widetilde{u}_n)f(\widetilde{u}_n) - \frac{\Delta t^3}{6}\widetilde{u}_n{'''}\right) + 2\Delta t f(\widetilde{u}_n).$$

We zien dat de fout is gegeven door

$$u(n\Delta t) - \widetilde{u}_n = \frac{\Delta t^3}{6}\left(u'''(\tau) + u'''(\widetilde{\tau})\right) = \frac{\Delta t^6}{3} u'''(\tau'),$$

met $\tau \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$.

b) De haasje-over methode is een tweestaps methode omdat we de oplossing op $n-1$ én n gebruiken om naar tijdstip $n+1$ te komen. Laat zien dat je de methode als Euler Forward voor een stelsel differentiaalvergelijkingen kan schrijven

$$\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_n \\ v_n \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} 0 \\ 2f(w_n) \end{pmatrix},$$

met $v_n = u_{n-1}$ en $w_n = u_n$.

antwoord We zien dat de eerste vergelijking in het stelsel triviaal is met de substitutie $v_n = \widetilde{u}_{n-1}$, $w_n = \widetilde{u}_n$. De tweede vergelijking is equivalent met de gestelde methode.

c) Gebruik de uitdrukking in b) om te laten zien dat de haasje-over methode onvoorwaardelijk instabiel is.

antwoord We passen de methode toe op $f(u) = \lambda u$ en schrijven deze in matrix vorm:

$$\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \Delta t\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

De stabiliteit wordt nu bepaald door de eigenwaarden van deze matrix. De eigenwaarden zijn de nulpunten van $-\mu(\Delta t\lambda - \mu) - 1$; $\mu_\pm = \frac{z \pm \sqrt{z^2-4}}{2}$. We zien dat we nooit *beide* eigenwaarden in absolute zin kleiner dan 1 krijgen.