Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- Gedeelde differenties ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$)
$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$
$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \, \xi \in [x_0, x_n].$$
- Interpolatie
$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i),$$
$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$
- Integratie
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a) f((a+b)/2) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \quad \text{(midpuntregel)},$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a) + f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad \text{(trapeziumregel)}.$$
- Middelwaardestelling: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a, b]$, dan is er een $\xi \in [a, b]$ waarvoor:
$$\int_a^b f(x) w(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x.$$
- Inverse van een 2×2 matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$
- Vastepuntstelling: De iteratie
$$x_{k+1} = g(x_k),$$
met $x_0 \in [a, b]$ convergeert naar een vast punt $x_* \in [a, b]$ als $|g'| < 1$ op $[a, b]$. Als bovendien $g'(x_*) = 0$, dan convergeert de iteratie kwadratisch.
- Vastepuntiteratie voor lineare stelsels: De iteratie
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$
convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

2 pt. **vraag 1 - niet-lineare vergelijkingen** We willen een nulpunt vinden van de functie $f(x) = x - \cos x$ in het interval $(0, \pi/2)$ met behulp van Newton's methode:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

a) Laat zien dat er precies één nulpunt is op het interval $(0, \pi/2)$.

b) Voor welke x_0 convergeert Newton's methode naar het gevraagde nulpunt (geef een interval)?

c) Hoe snel convergeert Newton's methode naar het gevraagde nulpunt wanneer met een x_0 beginnen die in het interval uit b) ligt?

2 pt. **vraag 2 - numerieke differentiatie** We bekijken de volgende benadering van de tweede afgeleide van een functie op het punt x:

$$f''(x) \approx \frac{2f(x-h) - 3f(x) + f(x+2h)}{3h^2}.$$

a) Laat zien dat de benaderingsfout van de genoemde benadering is gegeven door $Cf'''(\xi)h^q$ met $\xi \in [x-2h, x+h]$ en geef C en q.

b) We gaan nu de afgeleide van $\sin(2x)$ benaderen. Hoe groot moet h zijn zodat de fout gegarandeerd kleiner is dan een gegeven ϵ ?

3 pt. **vraag 3 - numerieke integratie** We willen een benadering vinden voor integralen van de vorm

$$I = \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Laat zien dat we de integraal kunnen benaderen met

$$\widetilde{I} = 2tf(0) + \frac{t^3}{3}f''(0)$$

door een Taylorexpanse van f rond $x = 0$ te gebruiken.

b) Laat zien dat deze benadering exact is voor polynomen van graad 3 of kleiner.

c) Geef een uitdrukking voor de benaderingsfout indien de vierde afgeleide van f positief is op het interval, ofwel $f^{(4)}(x) > 0$ voor $x \in [-t, t]$.

3 pt. **vraag 4 - differentiaalvergelijking** We willen de differentiaalvergelijkingen oplossen van de vorm

$$y'(t) = y(t) + f(y(t)),$$

met de volgende methode

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \left(y_{n+1} + f(y_n) \right).$$

a) Laat zien dat dit een eerste orde methode en dus dat de *lokale* truncatiefout van orde Δt^2 is.

b) Analyseer de stabiliteit van deze methode en geef een uitdrukking voor het stabiliteitsgebied.

c) Geef een bovengrens voor Δt waarvoor de methode nog steeds stabiel is als we deze toepassen op $y'(t) = y(t) + \cos(3y(t))$.