Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- Gedeelde differenties ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$)
$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$
$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \xi \in [x_0, x_n].$$
- Interpolatie
$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i),$$
$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$
- Integratie
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f((a+b)/2) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \quad \text{(midpuntregel)},$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a)+f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad \text{(trapeziumregel)}.$$
- Middelwaardestelling: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a, b]$, dan is er een $\xi \in [a, b]$ waarvoor:
$$\int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x.$$
- Inverse van een 2×2 matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$
- Vastepuntstelling: De iteratie
$$x_{k+1} = g(x_k),$$
met $x_0 \in [a, b]$ convergeert naar een vast punt $x_* \in [a, b]$ als $|g'| < 1$ op $[a, b]$. Als bovendien $g'(x_*) = 0$, dan convergeert de iteratie kwadratisch.
- Vastepuntiteratie voor lineare stelsels: De iteratie
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$
convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

2 pt. **vraag 1 - niet-lineare vergelijkingen** We willen de derdemachtswortel van een getal $a > 1$ uitrekenen.

a) Laat zien dat de volgende iteratie convergeert naar $\sqrt[3]{a}$ als $x_0 > \sqrt[3]{2a/5}$

$$x_{k+1} = (2x_k + a/x_k^2)/3.$$

b) Een alternatieve methode om de derdemachtswortel uit te rekenen is

$$x_{k+1} = x_k - 2(a^{-2}x_k^3 - a^{-1})/3.$$

Welke van de twee methoden convergeert sneller? (motiveer je antwoord).

2 pt. **vraag 2 - stelsels vergelijkingen** We willen het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oplossen. Gegeven is dat A symmetrisch is en zowel positieve als negatieve reële eigenwaarden heeft. De kleinste eigenwaarde (in absolute zin) is μ, de grootste (in absolute zin) is L.

a) Laat zien dat de volgende vastepuntiteratie convergeert naar de oplossing

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + (1/L^2)A(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k)$$

b) Laat zien dat met $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ de *relatieve* fout na N iteraties is geven door

$$\frac{\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_*\|_2}{\|\mathbf{x}_*\|_2} \leq \left(1 - (\mu/L)^2\right)^N,$$

waarbij $\mathbf{x}_* = A^{-1}\mathbf{b}$ de exacte oplossing is.

c) Hoeveel iteraties zijn er minimaal nodig om een relatieve fout van maximaal ϵ te garanderen wanneer we met $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ beginnen?

3 pt. **Vraag 3 - Integratie** We willen integralen benaderen van de vorm

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

We bekijken in deze opgave benaderingen van de vorm

$$I_\alpha = f(-\alpha) + f(\alpha),$$

met $\alpha \in (0, 1]$.

a) Laat zien dat voor $\alpha = 1$ de fout in de benadering I_1 is gegeven door

$$I - I_1 = -\frac{2}{3}f''(\xi),$$

met $\xi \in [-1, 1]$.

b) We definieren de interpolant van f op de punten $\{-1, -\alpha, \alpha, 1\}$:

$$p_3(x) = f[-\alpha] + f[-\alpha, \alpha](x+\alpha) + f[-\alpha, \alpha, -1](x+\alpha)(x-\alpha) + f[-\alpha, \alpha, -1, 1](x+\alpha)(x-\alpha)(x+1).$$

Geef een uitdrukking voor de fout $e_3(x) = f(x) - p_3(x)$.

c) Laat zien dat we voor $\alpha = \sqrt{1/3}$ geldt dat:

$$\int_{-1}^{1} p_3(x)\mathrm{d}x = f(-\alpha) + f(\alpha).$$

d) Laat zien dat de benadering I_α met $\alpha = \sqrt{1/3}$ exact is als f een 3de-graads polynoom is.

(Z.O.Z.)

3 pt. **vraag 4 - differentiaalvergelijkingen** De Adams-Bashford methode benadert de oplossing van een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ als volgt

$$\widetilde{u}_{n+1} = \widetilde{u}_n + \Delta t(3f(\widetilde{u}_n) - f(\widetilde{u}_{n-1}))/2,$$

voor gegeven $\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1$ en waar $\widetilde{u}_n$ een benadering is van $u(n\Delta t)$.

a) Laat zien dat de locale truncatiefout van deze methode is gegeven door

$$\widetilde{u}_n - u(n\Delta t) = C \cdot (\Delta t)^3,$$

en geef een uitdrukking voor de constante C. *Hint: Gebruik een Taylorbenadering van de oplossing en een benadering van $u''(t)$ in termen van $u'(t)$ en $u'(t - \Delta t)$.*

b) Geef een uitdrukking voor het stabiliteitsgebied van de methode. *Hint: Herschrijf de methode eerst als een stelsel $\mathbf{w}_{n+1} = G\mathbf{w}_n$ met $\mathbf{w}_n = (\widetilde{u}_n, \widetilde{u}_{n-1})$.*