Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- Gedeelde differenties ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$)
$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$
$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \, \xi \in [x_0, x_n].$$
- Interpolatie
$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots x_n] \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i),$$
$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$
- Integratie
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f((a+b)/2) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \quad \text{(midpuntregel)},$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a)+f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad \text{(trapeziumregel)}.$$
- Middelwaardestelling: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a, b]$, dan is er een $\xi \in [a, b]$ waarvoor:
$$\int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x.$$
- Inverse van een 2×2 matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$
- Vastepuntstelling: De iteratie
$$x_{k+1} = g(x_k),$$
met $x_0 \in [a, b]$ convergeert naar een vast punt $x_* \in [a, b]$ als $|g'| < 1$ op $[a, b]$. Als bovendien $g'(x_*) = 0$, dan convergeert de iteratie kwadratisch.
- Vastepuntiteratie voor lineare stelsels: De iteratie
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$
convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

2 pt. **vraag 1 - niet-lineare vergelijkingen** We willen de derdemachtswortel van een getal $a > 1$ uitrekenen.

a) Laat zien dat de volgende iteratie convergeert naar $\sqrt[3]{a}$ als $x_0 > \sqrt[3]{2a/5}$

$$x_{k+1} = (2x_k + a/x_k^2)/3.$$

antwoord

- Een vast punt voldoet aan $x = (2x + a/x^2)/3$, or $3x^3 = 2x^3 + a$ so $x^3 = a$.
- De iteratie convergeert als $|g'(x)| < 1$ met $g(x) = (2x + a/x^2)/3$.
- We hebben $g'(x) = 2/3 - 2a/x^{-3}/3 = 2(1 - a/x^3)/3$ dus in ieder geval convergentie als $|1 - a/x^3| < 3/2$ ofwel $a/x^3 < 5/2$ dus $x^3 > 2a/5$. $x_0 > a$ voldoet zeker aan deze eis aangezien $a > 1$.

b) Een alternatieve methode om de derdemachtswortel uit te rekenen is

$$x_{k+1} = x_k - 2(a^{-2}x_k^3 - a^{-1})/3.$$

Welke van de twee methoden convergeert sneller? (motiveer je antwoord).

antwoord We willen weten hoe snel de methoden convergeren

- Voor de methode uit a) hebben we $g'(a^{1/3}) = 0$, dus kwadratische convergentie.
- We hebben hier en vastepuntiteratie met $g(x) = x - (x^3/a^2 - 1/a)/3$ en $g'(x) = 1 - 2(x/a)^2$. We hebben $|g'(x)| < 1$ als $(x/a)^2 < 1$, dus iig lineaire convergentie voor $x_0 \in (-a, a)$.
- Verder hebben we $g'(a^{1/3}) \neq 0$, dus geen kwadratische convergentie.

We hebben liever de methode uit a).

2 pt. **vraag 2 - stelsels vergelijkingen** We willen het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oplossen. Gegeven is dat A symmetrisch is en zowel positieve als negatieve reële eigenwaarden heeft. De kleinste eigenwaarde (in absolute zin) is μ, de grootste (in absolute zin) is L.

a) Laat zien dat de volgende vastepuntiteratie convergeert naar de oplossing

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + (1/L^2)A(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k)$$

antwoord

- De fout $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*$ voldoet aan

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{e}_k - (1/L^2)A^2\mathbf{e}_k.$$

- Voor convergentie moet de spectrale radius van $I-(1/L^2)A^2$ kleiner zijn dan 1. Aangezien A^2 alleen positieve eigenwaarden heeft en een spectrale radius van L^2 krijgen we het gewenste resultaat.

b) Laat zien dat met $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ de *relatieve* fout na N iteraties is geven door

$$\frac{\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_*\|_2}{\|\mathbf{x}_*\|_2} \leq \left(1 - (\mu/L)^2\right)^N,$$

waarbij $\mathbf{x}_* = A^{-1}\mathbf{b}$ de exacte oplossing is.

antwoord

- We weten dat $\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_*\|_2 \leq \|I - A^2/L^2\|_2^N \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*\|_2$. Met $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ volgt hieruit
$$\frac{\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_*\|_2}{\|\mathbf{x}_*\|} \leq \|I - A^2/L^2\|_2^N \leq \rho(I - A^2/L^2)^N.$$
- Verder hebben we $\rho(I - A^2/L^2) = (1 - (\mu/L)^2)$.

c) Hoeveel iteraties zijn er minimaal nodig om een relatieve fout van maximaal ϵ te garanderen wanneer we met $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ beginnen?

antwoord $N = \log(\epsilon)/\log(1 - (\mu/L)^2)$.

3 pt. **Vraag 3 - Integratie** We willen integralen benaderen van de vorm
$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
We bekijken in deze opgave benaderingen van de vorm
$$I_\alpha = f(-\alpha) + f(\alpha),$$
met $\alpha \in (0, 1]$.

a) Laat zien dat voor $\alpha = 1$ de fout in de benadering I_1 is gegeven door
$$I - I_1 = -\frac{2}{3} f''(\xi),$$
met $\xi \in [-1, 1]$.

antwoord

- We kunnen direct de formule van het voorblad toepassen.
- Alternatief:we construeren de interpolant $p_1(x) = f[-1] + f[-1, 1](x + 1)$ met foutterm $e_1(x) = f(x) - p_1(x) = f[-1, 1, x](x + 1)(x - 1)$. Na integratie krijgen we
$$\int_{-1}^{1} p_1(x)\mathrm{d}x = f(-1) + f(1) = I_1.$$
We krijgen dus
$$I - I_1 = \int_{-1}^{1} e_1(x)\mathrm{d}x = f[-1, 1, \eta] \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\mathrm{d}x = -\frac{2}{3} f''(\xi).$$

b) We definieren de interpolant van f op de punten $\{-1, -\alpha, \alpha, 1\}$:

$p_3(x) = f[-\alpha] + f[-\alpha, \alpha](x+\alpha) + f[-\alpha, \alpha, -1](x+\alpha)(x-\alpha) + f[-\alpha, \alpha, -1, 1](x+\alpha)(x-\alpha)(x+1).$

Geef een uitdrukking voor de fout $e_3(x) = f(x) - p_3(x)$.

antwoord

- Uit de handige formules vinden we direct
$$e_3(x) = f[-\alpha, \alpha, -1, 1, x](x^2 - \alpha^2)(x^2 - 1) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x^2 - \alpha^2)(x^2 - 1),$$
met $\xi \in [-1, 1]$.

c) Laat zien dat we voor $\alpha = \sqrt{1/3}$ geldt dat:

$$\int_{-1}^{1} p_3(x)\mathrm{d}x = f(-\alpha) + f(\alpha).$$

antwoord

- We integreren eerst $p_3(x)$:

  $$\int_{-1}^{1} p_3(x)\mathrm{d}x = 2f[-\alpha] + 2\alpha f[-\alpha,\alpha] + f[-\alpha,\alpha,-1](2/3-2\alpha^2) + f[-\alpha,\alpha,-1,1](2/3-2\alpha^2).$$
- Voor $\alpha = \sqrt{1/3}$ zien we dat de laatste 2 termen wegvallen.
- Uitschrijven van de gedeelde differenties $2f[-\alpha]+2\alpha f[-\alpha,\alpha]$ geeft de gewenste uitdrukking.

d) Laat zien dat de benadering I_α met $\alpha = \sqrt{1/3}$ exact is als f een 3de-graads polynoom is.

antwoord

- Met behulp van (b) en (c) vinden we dat

  $$I - I_2 = \int_{-1}^{1} e_3(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{f^4(\xi)}{4!}(x^2-\alpha^2)(x^2-1)\mathrm{d}x.$$
- Voor 3de-graads polynomen geld dat $\frac{f^4(\xi)}{4!} = 0$.
- Alternatief: voor een 3de-graads polynoom hebben we $p_3 = f$ aangezien er maar een 3de-graads polynoom is die door de gegeven punten gaat.

(Z.O.Z.)

3 pt. **vraag 4 - differentiaalvergelijkingen** De Adams-Bashford methode benadert de oplossing van een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ als volgt

$$\widetilde{u}_{n+1} = \widetilde{u}_n + \Delta t(3f(\widetilde{u}_n) - f(\widetilde{u}_{n-1}))/2,$$

voor gegeven $\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1$ en waar $\widetilde{u}_n$ een benadering is van $u(n\Delta t)$.

a) Laat zien dat de locale truncatiefout van deze methode is gegeven door

$$\widetilde{u}_n - u(n\Delta t) = C \cdot (\Delta t)^3,$$

en geef een uitdrukking voor de constante C. *Hint: Gebruik een Taylorbenadering van de oplossing en een benadering van $u''(t)$ in termen van $u'(t)$ en $u'(t-\Delta t)$.*

antwoord

- Taylorbenadering van de oplossing:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f(u_n) + \frac{\Delta t^2}{2} u''(n\Delta t) + \frac{\Delta t^3}{6} u'''(\tau_n),$$

- en de volgende benadering van u''

$$u''(n\Delta t) = \frac{f(u_n) - f(u_{n-1})}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} u''(\tau_n)$$

- Combineren geeft

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f(u_n) + \Delta t f(u_n)/2 - \Delta t f(u_{n-1})/2 + \frac{\Delta t^3}{6}(2u''(\tau_n) + u'''(\tau_n)).$$

b) Laat zien dat je de methode ook kunt schrijven als een stelsel van 2 gekopelde vergelijkingen

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \frac{\Delta t}{2} F(\mathbf{w}_n),$$

met $\mathbf{w}_n = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ en $F(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 3f(w_1) \\ f(w_2) \end{pmatrix}$. *Hint: Gebruik* $\mathbf{w}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$

antwoord Invullen geeft het gewenste resultaat.

c) Geef een uitdrukking voor het stabiliteitsgebied van de methode.

antwoord

- Pas toe op $u'(t) = \lambda t$:
$$u_{n+1} = (1 + 3\Delta t\lambda/2)u_n - (\Delta t\lambda/2)u_{n-1}.$$
- Herschrijf als een stelsel
$$\mathbf{u}_{n+1} = G\mathbf{u}_n,$$
met
$$G = \begin{pmatrix} 1 + 3\Delta t\lambda/2 & -(\Delta t\lambda/2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Voor stabiliteit moet $\rho(G) < 1$.
- De characteristieke vergelijking is
$$-(1 + 3\Delta t\lambda/2 - \mu)\mu + (\Delta t\lambda/2) = \mu^2 - (1 + 3z/2)\mu + z/2,$$
waar $z = \Delta t\lambda$.
- Hieruit volgt
$$\mu_\pm = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} = \frac{1 + 3z/2 \pm \sqrt{1 + z + 9z^2/4}}{2},$$
en stabiel als $|\mu_\pm| < 1$.