Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- Gedeelde differenties ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$)
$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$
$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \, \xi \in [x_0, x_n].$$
- Interpolatie
$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i),$$
$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$
- Integratie
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a) f((a+b)/2) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \quad \text{(midpuntregel)},$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a) + f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad \text{(trapeziumregel)}.$$
- Middelwaardestelling: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a, b]$, dan is er een $\xi \in [a, b]$ waarvoor:
$$\int_a^b f(x) w(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x.$$
- Inverse van een 2×2 matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$
- Vastepuntstelling: De iteratie
$$x_{k+1} = g(x_k),$$
met $x_0 \in [a, b]$ convergeert naar een vast punt $x_* \in [a, b]$ als $|g'| < 1$ op $[a, b]$. Als bovendien $g'(x_*) = 0$, dan convergeert de iteratie kwadratisch.
- Vastepuntiteratie voor lineare stelsels: De iteratie
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$
convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

2 pt. **vraag 1 - niet-lineare vergelijkingen** Om een vast punt van g te vinden kunnen we de methode van Lemaréchal gebruiken

$$x_{k+1} = \alpha x_k + (1-\alpha)g(x_k).$$

a) Neem aan dat $-L \leq g'(x) < 0$ en laat zien dat deze methode convergeert naar een vast punt van g voor $\alpha \in \left(\frac{L-1}{L+1}, 1\right)$.

antwoord

- Laat zien dat een vast punt van $g_\alpha(x) = \alpha x + (1-\alpha)g(x)$ een vast punt van $g(x)$ is.
- De iteratie convergeert als $|g'_\alpha(x)| < 1$.
- We hebben $g'_\alpha(x) = \alpha + (1-\alpha)g'(x)$, dus convergentie als $(L-1)/(L+1) < \alpha < 1$.

b) Geef de waarde voor α waarvoor de methode het snelst convergeert wanneer $g'(x) = -L$.

antwoord

- Voor snelle convergentie willen we $|g'_\alpha(x)|$ zo klein mogelijk ($= 0$).
- We vinden $\alpha = L/(L+1)$.

2 pt. **vraag 2 - Interpolatie** We willen de functie $f(t) = 2^{-t}\cos(\pi t)$ benaderen op het interval $[0, 2\pi]$.

a) Stel een tweedegraads interpolerend polynoom, p, op met als steunpunten $\{0, 1, 2\}$.

antwoord

- Met behulp van Lagrange polynomen:
$$p(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}f(0) - \frac{x(x-2)}{1}f(1) + \frac{x(x-1)}{2}f(2)$$
$$= (x^2-3x+2)/2 + (x^2-2x)/2 + (x^2-x)/8 = \frac{9}{8}x^2 - \frac{21}{8}x + 1.$$

b) Geef een bovengrens voor de fout $|f(t) - p(t)|$ (je mag de benodigde eigenschappen van f afschatten als een constante M)

antwoord

- De fout is gegeven door
$$e(x) = f[0,1,2,x]x(x-1)(x-2).$$
- We vervangen $f[0,1,2,x] = \frac{f'''(\xi)}{6}$
- Schat de derde afgeleide af $|f'''(\xi)| \leq M$
- extremum van $\phi(x) = x(x-1)(x-2)$: $\phi'(x) = (x-1)(x-2) + x(x-1) + x(x-2) = 0$ geeft $3x^2 - 6x + 2 = 0$ met nulpunten $1 \pm \sqrt{1/3}$.
- dus $|\phi(x)| \leq \max\{|\phi(1+\sqrt{1/3})|, |\phi(1-\sqrt{1/3})|\} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

3 pt. **Vraag 3 - Integratie** We willen de volgende integraal benaderen

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

waarbij $f'(x) > 0$. We gebruiken een kwadratuurregel van de vorm

$$I_\alpha = (b-a)\left(\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)\right).$$

a) Laat zien dat de fout voor $\alpha = 0$ en $\alpha = 1$ is gegeven door

$$I - I_0 = \frac{f'(\xi_0)}{2}(b-a)^2,$$

en

$$I - I_1 = -\frac{f'(\xi_1)}{2}(b-a)^2,$$

waarbij $\xi_0, \xi_1 \in [a, b]$.

antwoord

- We stellen een interpolerend polynoom op : $f(x) = f[a] + f[a,x](x-a)$
- Fout is gegeven door $I - I_0 = \int_a^b f[a,x](x-a)\mathrm{d}x$
- $(x-a)$ verandert niet van teken; $I - I_0 = f[a,\xi]\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x$.
- Met $f[a,\xi] = f'(\xi_0)$ en $\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x = (b-a)^2/2$ krijgen we het gewenste resultaat

b) Laat zien dat de twee benaderingen voor $\alpha = 0$ en $\alpha = 1$ een boven- en ondergrens geven: $I_0 \leq I \leq I_1$.

antwoord

- Omdat $f'(x) > 0$ krijgen we dat $I - I_0 > 0$ ofwel $I > I_0$.
- Op dezelfde manier vinden we dat $I - I_1 < 0$ ofwel $I < I_1$.

c) Laat zien dat we de fout voor $\alpha = \frac{1}{2}$ als volgt kunnen afschatten: $|I_{1/2} - I| \leq (I_1 - I_0)/2$.

antwoord

- We zien dat $I_{1/2} = (I_0 + I_1)/2$ dus $I_{1/2} - I = (I_0 + I_1)/2 - I$.
- Gebruikmakend van $I_0 \leq I \leq I_1$ krijgen we $(I_0+I_1)/2 - I_1 < (I_0+I_1)/2 - I < (I_0+I_1)/2 - I_0$
- ofwel $(I_0 - I_1)/2 < I_{1/2} - I < (I_1 - I_0)/2$, dus $|I_{1/2} - I| < (I_1 - I_0)/2$

(Z.O.Z.)

3 pt. **vraag 4 - differentiaalvergelijkingen** We bekijken de volgende methode om een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ op te lossen

$$\widetilde{u}_{n+2} = \widetilde{u}_{n+1} + \Delta t \left(\alpha f(\widetilde{u}_{n+1}) + \beta f(\widetilde{u}_n)\right),$$

met $\alpha + \beta = 1$ en waarbij $\widetilde{u}_n$ een benadering is van $u(n\Delta t)$.

a) Laat zien dat de truncatiefout is gegeven door

$$u(n\Delta t) - \widetilde{u}_n = A\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3),$$

en geef een uitdrukking voor A.

antwoord

- Taylor expansie van de oplossing

$$u(t + 2\Delta t) = u(t + \Delta t) + \Delta t u'(t + \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{2} u''(t + \Delta t) + \frac{\Delta t^3}{6} u'''(\tau).$$

- Nog een Taylor van $u'(t) = u'(t + \Delta t) - \Delta t u''(t + \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{2} u'''(\tau)$
- Schrijf nu als

$$u(t + 2\Delta t) = u(t + \Delta t) + (\alpha + \beta)\Delta t u'(t + \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{2} u''(t + \Delta t) + \frac{\Delta t^3}{6} u'''(\tau),$$

en vervang $\beta u'(t + \Delta t)$ door zijn Taylorserie

$$u(t{+}2\Delta t) = u(t{+}\Delta t){+}\alpha\Delta t u'(t{+}\Delta t){+}\beta\Delta t \left(u'(t) + \Delta t u''(t + \Delta t) - \frac{\Delta t^2}{2} u'''(\tau)\right){+}\frac{\Delta t^2}{2} u''(t{+}\Delta t){+}\frac{\Delta t^3}{6} u'''($$

ofwel

$$u(t{+}2\Delta t) = u(t{+}\Delta t){+}\alpha\Delta t f(u(t{+}\Delta t)){+}\beta\Delta t f(u(t)){+}\Delta t^2 \left(\beta u''(t + \Delta t) + \frac{1}{2} u''(t + \Delta t)\right){-}\beta\Delta t^3 u'''(\tau)/2.$$

We vinden dus $A = \beta u''(t + \Delta t) + \frac{1}{2} u''(t + \Delta t)$.

b) Bepaal de waarde van α en β waarvoor de methode van orde 2 is.

antwoord

- We willen dat $A = 0$
- met behulp van het vorige antwoord vinden we $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$.

c) Bepaal het stabiliteitsgebied van de methode voor $\alpha = 1$.

antwoord

- Pas toe op $u'(t) = \lambda u(t)$
- $u_{n+2} = u_{n+1} + \Delta t \lambda u_{n+1}$
- stabiel als $|1 + \Delta t \lambda| < 1$.