Hertentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- **Representatiefout** zwevendekommagetallen: $\mathrm{fl}(x) = x(1+\epsilon) = x(1+\epsilon')^{-1}$ met $|\epsilon|, |\epsilon'| \leq \eta$.
- **Exacte afronding**: $\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x) \circ \mathrm{fl}(y)\right) = \left(\mathrm{fl}(x) \circ \mathrm{fl}(y)\right)(1+\epsilon)$ met $|\epsilon| \leq \eta$ en waarbij $\circ$ staat voor een van de elementaire rekenkundige operaties $+, -, *, /$.
- **Meerdere afrondfouten**: Gegeven $|\epsilon_i| \leq \eta$ en $n\eta < 1$, dan $\prod_{i=1}^{n}(1+\epsilon_i) = (1+\theta_n)$ met $|\theta_n| \leq \frac{n\eta}{1-n\eta}$.
- **Gedeelde differenties** (met $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$)

$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \ \xi \in [x_0, x_n].$$

- **Kwadratuurregels:**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f((a+b)/2) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \quad \text{(midpuntregel)},$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a)+f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad \text{(trapeziumregel)}.$$

- **Middelwaardestelling**: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a,b]$, dan is er een $\xi \in [a,b]$ waarvoor:

$$\int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Vastepuntiteratie voor lineare stelsels: De iteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$

convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

2 pt. **vraag 1 - afrondfouten** In deze opgave bekijken we de afrondfout in de berekening $y = \frac{2x-1}{3x}$. Je mag aannemen dat x een zwevendekommagetal is.

a) Laat zien dat de *relatieve fout* kan worden begrensd door

$$\frac{|\mathrm{fl}(y) - y|}{|y|} \leq \frac{4\eta}{1-4\eta}\frac{|2x+1|}{|2x-1|},$$

waarbij η de afrondeenheid is. *Hint: gebruik hier dat je de afrondfout ook kunt schrijven als fl(x)* $= x(1+\epsilon)^{-1}$ *met* $|\epsilon| \leq \eta$

b) Voor welke x is deze berekening problematisch?

3 pt. **vraag 2 - lineare vergelijkingen** We beschouwen de volgende vastepuntiteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I - \omega A)\,\mathbf{x}_k + \omega\mathbf{b},$$

met $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Wat is het vaste punt van deze iteratie?

b) Laat zien dat deze vastepuntitertie convergeert naar het vaste punt wanneer $0 < \omega < \frac{2}{3}$.

c) Geef de waarden voor ω waarvoor de iteratie het snelst convergeert

2 pt. **vraag 3 - Integratie** We willen de volgende integraal

$$I(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t,$$

voor $0 < x \leq 1$ benaderen met de *herhaalde* midpuntregel:

$$\widetilde{I}_n(x) = h\sum_{k=0}^{n-1}\exp(-t_k^2),$$

waarbij $t_k = (k + \frac{1}{2}) \cdot h$ en $h = x/n$.

a) Laat zien dat de fout is gegeven door

$$I(x) - \widetilde{I}_n(x) = \frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}(2\xi_k^2 - 1)\exp(-\xi_k^2),$$

met $\xi_k \in [k \cdot k, (k+1)\cdot h]$.

b) Gegeven een ϵ, bepaal n zodat $|I(x) - \widetilde{I}_n(x)| \leq \epsilon$ voor alle $x \in [0,1]$.

3 pt. **vraag 4 - differentiaalvergelijkingen** We bekijken de volgende methode om een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ op te lossen

$$\widetilde{u}_{n+1} = \widetilde{u}_n + \frac{h}{2}\Big(3f\big(\widetilde{u}_n + \tfrac{h}{3}f(\widetilde{u}_n)\big) - f(\widetilde{u}_n)\Big).$$

waarbij $\widetilde{u}_n$ een benadering is van $u(n \cdot h)$.

a) Laat zien dat de methode een truncatiefout van orde h^3 heeft, ofwel

$$u(n \cdot h) - \widetilde{u}_n = \mathcal{O}(h^3).$$

b) Bepaal het stabiliteitsgebied van de methode.