Hertentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- **Representatiefout** zwevendekommagetallen: $\mathrm{fl}(x) = x(1+\epsilon) = x(1+\epsilon')^{-1}$ met $|\epsilon|, |\epsilon'| \leq \eta$.
- **Exacte afronding**: $\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x) \circ \mathrm{fl}(y)\right) = \left(\mathrm{fl}(x) \circ \mathrm{fl}(y)\right)(1+\epsilon)$ met $|\epsilon| \leq \eta$ en waarbij $\circ$ staat voor een van de elementaire rekenkundige operaties $+, -, *, /$.
- **Meerdere afrondfouten**: Gegeven $|\epsilon_i| \leq \eta$ en $n\eta < 1$, dan $\prod_{i=1}^{n}(1+\epsilon_i) = (1+\theta_n)$ met $|\theta_n| \leq \frac{n\eta}{1-n\eta}$.
- **Gedeelde differenties** (met $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$)

$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\ \xi \in [x_0, x_n].$$

- **Kwadratuurregels:**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f((a+b)/2) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \quad \text{(midpuntregel)},$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a)+f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad \text{(trapeziumregel)}.$$

- **Middelwaardestelling**: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a,b]$, dan is er een $\xi \in [a,b]$ waarvoor:

$$\int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Vastepuntiteratie voor lineare stelsels: De iteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$

convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

2 pt. **vraag 1 - afrondfouten** In deze opgave bekijken we de afrondfout in de berekening $y = \frac{2x-1}{3x}$. Je mag aannemen dat x een zwevendekommagetal is.

a) Laat zien dat de *relatieve fout* kan worden begrensd door

$$\frac{|\mathrm{fl}(y) - y|}{|y|} \leq \frac{4\eta}{1-4\eta}\frac{|2x+1|}{|2x-1|},$$

waarbij η de afrondeenheid is. *Hint: gebruik hier dat je de afrondfout ook kunt schrijven als fl*$(x) = x(1+\epsilon)^{-1}$ *met* $|\epsilon| \leq \eta$

antwoord We moeten rekening houden met de deling, de vermenigvuldiging (2x) en de optelling; dus 4 bronnen van afrondfouten. We hebben

$$\mathrm{fl}(y) = \frac{(2x(1+\epsilon_0) - 1)(1+\epsilon_1)}{3x(1+\epsilon_2)}(1+\epsilon_3) = \frac{2x(1+\delta_4) - 1(1+\delta_3)}{3x}$$

met $|\delta_n| \leq n\eta/(1-n\eta)$. Dus

$$|\mathrm{fl}(y) - y| \leq \frac{4\eta}{1-4\eta}\frac{|2x+1|}{|3x|}$$

Delen door $|y|$ geeft het gewenste resultaat.

- $\frac{1}{2}$ pt: correct identificeren van de 3 bronnen van afrondfouten en toepassen stelling exacte afronding
- $\frac{1}{2}$ pt: correct toepassen van stelling over meerder afrondfouten, ongeacht of alle afrondfouten correct zijn geindentificeerd in de vorige stap.
- $\frac{1}{2}$ pt: correct afschatten van resultaat uit vorige stap (ongeacht of dat goed was of niet).

b) Voor welke x is deze berekening problematisch?

antwoord Voor $x \approx \frac{1}{2}$ wordt de relatieve fout erg groot (cancellatiefout) en voor $x \approx 0$ wordt $|y|$ te groot (overflow).

- $\frac{1}{4}$ pt: correct identificeren cancellatiefout
- $\frac{1}{4}$ pt: correct identificeren overflow

3 pt. **vraag 2 - lineaire vergelijkingen** We beschouwen de volgende vastepuntiteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I - \omega A)\,\mathbf{x}_k + \omega \mathbf{b},$$

met $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Wat is het vaste punt van deze iteratie?

> **antwoord** Het vaste punt is $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = (1/3, 1/3)$.
>
> - $\frac{1}{2}$ pt: uitwerken ..

b) Laat zien dat deze vastepuntitertie convergeert naar het vaste punt wanneer $0 < \omega < \frac{2}{3}$.

> **antwoord** Ze mogen hier de stelling van het formuleblad gebruiken:
>
> - $\frac{1}{2}$ pt: Noem dat convergentie naar vast punt in het interval wanneer $\rho(I - \omega A) < 1$
> - $\frac{1}{2}$ pt: reken eigenwaarden uit $(1, 3)$
> - $\frac{1}{2}$ pt: concludeer dat $0 < \omega < \frac{2}{3}$

c) Geef de waarden voor ω waarvoor de iteratie het snelst convergeert

> **antwoord** We willen $\rho(I - \omega A)$ zo klein mogelijk, dus $\omega = 1/2$
>
> - $\frac{1}{2}$ pt: Noem eis dat $\rho(I - \omega A)$ zo klein mogelijk moet zijn
> - $\frac{1}{2}$ pt: bepaal optimale ω door gelijkstellen $(1 - \omega) = -(1 - 3\omega)$. Eventueel mogen ze direct de formule $2/(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$ noemen.

2 pt. **vraag 3 - Integratie** We willen de volgende integraal

$$I(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t,$$

voor $0 < x \leq 1$ benaderen met de *herhaalde* midpuntregel:

$$\widetilde{I}_n(x) = h \sum_{k=0}^{n-1} \exp(-t_k^2),$$

waarbij $t_k = (k + \frac{1}{2}) \cdot h$ en $h = x/n$.

a) Laat zien dat de fout is gegeven door

$$I(x) - \widetilde{I}_n(x) = \frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{n-1} (2\xi_k^2 - 1) \exp(-\xi_k^2),$$

met $\xi_k \in [k \cdot k, (k+1) \cdot h]$.

antwoord Op een deelinterval $[k \cdot h, (k+1) \cdot h]$ is de fout gegeven door

$$\frac{f''(\xi_k)}{24} h^3,$$

dus

$$I(x) - \widetilde{I}_n(x) = \frac{h^3}{24} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k),$$

met $f''(t) = 2(2t^2 - 1) \exp(-t^2)$.

- $\frac{1}{2}$ pt: toepassen formuleblad
- $\frac{1}{2}$ pt: correct uitwerken

b) Gegeven een ϵ, bepaal n zodat $|I(x) - \widetilde{I}_n(x)| \leq \epsilon$ voor alle $x \in [0, 1]$.

antwoord Bovengrens

$$\left| I(x) - \widetilde{I}_n(x) \right| = \left| \frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{n-1} (2\xi_k^2 - 1) \exp(-\xi_k^2) \right| \leq \frac{\sup_x |x^3|}{12n^2} \sup_x |(2x^2 - 1) \exp(-x^2)| \leq \frac{1}{12n^2}.$$

Geeft $n \geq (12\epsilon)^{-1/2}$.

- $\frac{1}{2}$ pt: uitwerken bovengrens, gebruik dat $|x^3| \leq 1$, $|2x^2 - 1| \leq 1$ en $|\exp(-x^2)| \leq 1$. Een grovere bovengrens met $|2x^2 - 1| \leq |2x^2| + |1| \leq |3|$ wordt ook goed gerekend.
- $\frac{1}{2}$ pt: berekenen van juiste n.

3 pt. **vraag 4 - differentiaalvergelijkingen** We bekijken de volgende methode om een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ op te lossen

$$\widetilde{u}_{n+1} = \widetilde{u}_n + \frac{h}{2}\Big(3f\big(\widetilde{u}_n + \tfrac{h}{3}f(\widetilde{u}_n)\big) - f(\widetilde{u}_n)\Big).$$

waarbij $\widetilde{u}_n$ een benadering is van $u(n \cdot h)$.

a) Laat zien dat de methode een truncatiefout van orde h^3 heeft, ofwel

$$u(n \cdot h) - \widetilde{u}_n = \mathcal{O}(h^3).$$

antwoord

- $\frac{1}{2}$ pt: Taylor van de oplossing:

$$u(t+h) = u(t) + hu'(t) + \frac{h^2}{2}u''(t) + \frac{h^3}{6}u'''(\tau).$$

- $\frac{1}{2}$ pt:Herschrijf mbv van de DV als

$$u(t+h) = u(t) + hf(u(t)) + \frac{h^2}{2}f'(u(t))f(u(t)) + \frac{h^3}{6}u'''(\tau).$$

- $\frac{1}{2}$ pt: Taylor de methode

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left(3f(u_n) + hf'(u_n)f(u_n) + \mathcal{O}(h^2) - hf(u_n)\right) = u_n + hf(u_n) + \frac{h^2}{2}f'(u_n)f(u_n) + \mathcal{O}(h^3).$$

- $\frac{1}{2}$ pt: De truncatiefout is dus gegeven door $\mathcal{O}(h^3)$.

b) Bepaal het stabiliteitsgebied van de methode.

antwoord Het stabiliteitsgebied is $|1 + z + z^2/2| < 1$.

- $\frac{1}{2}$ pt: Pas toe op de testvergelijking $u'(t) = \lambda u(t)$: $u_{n+1} = \left(1 + h\lambda + h^2\lambda^2/2\right) u_n$
- $\frac{1}{2}$ pt:lees stabiliteitsgebied af: $|1 + z + z^2/2| < 1$.