Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)[1]

Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- **Representatiefout** zwevendekommagetallen: $\mathrm{fl}(x) = x(1+\epsilon) = x(1+\epsilon')^{-1}$ met $|\epsilon|, |\epsilon'| \leq \eta$.
- **Exacte afronding**: $\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x) \circ \mathrm{fl}(y)\right) = \left(\mathrm{fl}(x) \circ \mathrm{fl}(y)\right)(1+\epsilon)$ met $|\epsilon| \leq \eta$ en waarbij $\circ$ staat voor een van de elementaire rekenkundige operaties $+, -, *, /$.
- **Meerdere afrondfouten**: Gegeven $|\epsilon_i| \leq \eta$ en $n\eta < 1$, dan $\prod_{i=1}^{n}(1+\epsilon_i) = (1+\theta_n)$ met $|\theta_n| \leq \frac{n\eta}{1-n\eta}$.
- **Gedeelde differenties** (met $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$)
$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$
$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \ \xi \in [x_0, x_n].$$
- **Kwadratuurregels:**
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f((a+b)/2) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \quad \text{(midpuntregel)},$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)(f(a)+f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad \text{(trapeziumregel)}.$$
- **Middelwaardestelling**: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a,b]$, dan is er een $\xi \in [a,b]$ waarvoor:
$$\int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x.$$
- Vastepuntiteratie voor lineare stelsels: De iteratie
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$
convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

2 pt. **vraag 1 - afrondfouten** In deze opgave bekijken we de afrondfout in de berekening $y = 4x^2 - 1$. Je mag aannemen dat x een zwevendekommagetal is.

a) Laat zien dat de *relatieve fout* kan worden begrensd door

$$\frac{|\mathrm{fl}(y) - y|}{|y|} \leq \left(\frac{3\eta}{1 - 3\eta}\right)\left(\frac{4x^2 + 1}{|4x^2 - 1|}\right),$$

waarbij η de afrondeenheid is.

> **antwoord** We moeten rekening houden met de kwadratering, de vermenigvuldiging en de optelling; dus 3 bronnen van afrondfouten. We hebben
>
> $$\mathrm{fl}(y) = (4x^2(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2) + a)(1 + \epsilon_3) = 4x^2(1 + \delta) + a(1 + \epsilon_3) = y + 4x^2\delta + a\epsilon_3$$
>
> met $|\delta| \leq 3\eta/(1 - 3\eta)$. Dus
>
> $$|\mathrm{fl}(y) - y| = |4x^2\delta + a\epsilon_3| \leq 4|x^2|\frac{3\eta}{1 - 3\eta} + |a|\eta \leq 4|x^2|\frac{3\eta}{1 - 3\eta} + |a|\frac{3\eta}{1 - 3\eta}$$
>
> Delen door $|y|$ geeft het gewenste resultaat.
>
> - $\frac{1}{2}$ pt: correct identificeren van de 3 bronnen van afrondfouten en toepassen stelling exacte afronding
> - $\frac{1}{2}$ pt: correct toepassen van stelling over meerder afrondfouten, ongeacht of alle afrondfouten correct zijn geindentificeerd in de vorige stap.
> - $\frac{1}{2}$ pt: correct afschatten van resultaat uit vorige stap (ongeacht of dat goed was of niet).

b) Voor welke x is deze berekening problematisch?

> **antwoord** Voor $x \approx \frac{1}{2}$ wordt de relatieve fout erg groot.
>
> - $\frac{1}{2}$ pt: correct identificeren de x waarvoor de relatieve fout groot wordt en beargumentatie

3 pt. **vraag 2 - niet-lineare vergelijkingen** We beschouwen de volgende vastepuntiteratie

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2}{3a^2}\left(x_k^3 - a\right),$$

met $a > 1$.

a) Wat is het vaste punt van deze iteratie?

> **antwoord** Het vaste punt is $x_* = a^{1/3}$.
>
> - $\frac{1}{2}$ pt: uitwerken $g(x) = x$ geeft $x^3 = a$, dus $x_* = a^{1/3}$.

b) Laat zien dat deze vastepuntitertie convergeert naar het vaste punt voor beginwaarden $x_0 \in (0, a)$.

> **antwoord** Ze mogen hier de stelling van het formuleblad gebruiken:
>
> - $\frac{1}{2}$ pt: Noem dat convergentie naar vast punt in het interval wanneer $|g'(x)| < 1$ in het interval
> - $\frac{1}{2}$ pt: laat zien dat $|g'(x)| = |1 - \frac{2x^2}{a^2}| < 1$, voor $x \in (0, a)$.
> - $\frac{1}{2}$ pt: noem dat vast punt in het interval ligt, $a^{1/3} \in (0, a)$ voor $a > 1$
>
> Direct bewijzen m.b.v. Taylor is ook toegestaan uiteraard.

c) Hoe snel convergeert de methode in het algemeen?

> **antwoord** Onder de aannamen uit de vorige vraag convergeert de methode in het algemeen *linear*.
>
> - $\frac{1}{2}$ pt: kwadratische convergentie als $g'(x_*) = 0$, dus alleen voor $a = 2^{3/4} (= 1.68\ldots)$.
> - $\frac{1}{2}$ pt: i.h.a. dus lineaire convergentie, want $|g'(x)| < 1$
>
> Bij deze vraag ben ik vergeten te vermelden dat we nog steeds beginnen in $(0, a)$. Als studenten de term algemeen anders hebben opgevat dan naar eigen inzicht beoordelen.

2 pt. **vraag 3 - Interpolatie** We willen de functie $f(x) = \cos(\pi x/2)$ benaderen op het interval $[-1, 1]$.

a) Stel een tweedegraads interpolerend polynoom, p, op met als steunpunten $\{-1, 0, 1\}$.

antwoord Het interpoleren polynoom is gegeven door

$$p(x) = 1 - x^2.$$

- $\frac{1}{2}$ pt: Met behulp van Lagrange polynomen:

$$p(x) = f(-1)\frac{x(x-1)}{2} + f(0)\frac{(x+1)(x-1)}{-1} + f(1)\frac{x(x+1)}{2}$$
$$= 1 - x^2.$$

direct het polynoom geven mag in dit geval ook.

b) Geef een bovengrens voor de fout $|f(x) - p(x)|$ op het interval $[-1, 1]$

antwoord De fout is gegeven door

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{2\pi^3}{48\sqrt{27}} = \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}}$$

- $\frac{1}{2}$ pt: De interpolatiefout is gegeven door

$$e(x) = f[-1, 0, 1, x]x(x+1)(x-1).$$

- $\frac{1}{2}$ pt: Vervangen $f[-1, 0, 1, x] = \frac{f'''(\xi)}{6}$ en afschatten: $f'''(x) = (\pi/2)^3 \sin(\pi x)$ dus $|f'''(\xi)| \leq (\pi/2)^3$
- $\frac{1}{2}$ pt: extrema van $\phi(x) = x(x+1)(x-1) = x^3 - x$: $\phi'(x) = 3x^2 - 1$ geeft extremum op $x = \sqrt{1/3}$ dus $|\phi(x)| \leq \sqrt{4/27}$.

3 pt. **vraag 4 - differentiaalvergelijkingen** We bekijken de volgende methode om een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ op te lossen

$$\widetilde{u}_{n+1} = \widetilde{u}_n + \frac{h}{2}\Big(f(\widetilde{u}_n) + f\big(\widetilde{u}_n + \tfrac{2h}{3} f(\widetilde{u}_n)\big)\Big).$$

waarbij $\widetilde{u}_n$ een benadering is van $u(n \cdot h)$.

a) Laat zien dat de truncatiefout is gegeven door

$$Ah^2 + \mathcal{O}(h^3),$$

en geef een uitdrukking voor A.

antwoord We vinden $A = \frac{h^2}{6} u''(n \cdot h)$ of $A = \frac{h^2}{6} f'(u(n \cdot h)) f(u(n \cdot h))$.

- $\frac{1}{2}$ pt: Taylor van de oplossing:

$$u(t+h) = u(t) + hu'(t) + \frac{h^2}{2} u''(t) + \frac{h^3}{6} u'''(\tau).$$

- $\frac{1}{2}$ pt:Herschrijf mbv van de DV als

$$u(t+h) = u(t) + hf(u(t)) + \frac{h^2}{2} f'(u(t)) f(u(t)) + \frac{h^3}{6} u'''(\tau).$$

- $\frac{1}{2}$ pt: Taylor de methode

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left(f(u_n) + f(u_n) + \frac{2h}{3} f'(u_n) f(u_n) + \mathcal{O}(h^2)\right) = u_n + hf(u_n) + \frac{h^2}{3} f'(u_n) f(u_n) + \mathcal{O}(h^3).$$

- $\frac{1}{2}$ pt: De truncatiefout is dus gegeven door $\frac{h^2}{6} u''(n \cdot h) + \mathcal{O}h^3$; dus $A = \frac{h^2}{6} u''(n \cdot h)$.

b) Bepaal het stabiliteitsgebied van de methode.

antwoord Het stabiliteitsgebied is $|1 + z + z^2/3| < 1$.

- $\frac{1}{2}$ pt: Pas toe op de testvergelijking $u'(t) = \lambda u(t)$: $u_{n+1} = \left(1 + h\lambda + h^2\lambda^2/3\right) u_n$
- $\frac{1}{2}$ pt:lees stabiliteitsgebied af: $|1 + z + z^2/3| < 1$.