Tentamen Numerieke Wiskunde A

dinsdag 2 januari 2001, 14.00-17.00 uur.

- Vermeld op elk vel dat je inlevert je naam, en op het eerste vel bovendien je studentnummer, het aantal ingeleverde vellen en je studierichting.
- Het is *niet* toegestaan het diktaat of je aantekeningen te raadplegen.
- Resultaten uit een vorig onderdeel van een opgave mag je gebruiken, ook al lukt het je niet dat onderdeel te bewijzen.
- **SUCCES!**

Opgave 1

Voor $h > 0$, zij $T(h)$ een benadering voor een grootheid I, zodat voor zekere constanten $c \neq 0$, en $0 < \alpha < \beta$,

$$I - T(h) = ch^\alpha + \mathcal{O}(h^\beta) \qquad (h \downarrow 0).$$

(a). Laat zien dat er precies één paar (λ, μ) is z.d.d. voor

$$\tilde{T}(h) := \lambda T(h) + \mu T(h/2)$$

geldt

$$I - \tilde{T}(h) = \mathcal{O}(h^\beta) \qquad (h \downarrow 0),$$

en geef een uitdrukking voor λ en μ in termen van α.

(b). Bewijs dat

$$\frac{T(h) - T(h/2)}{T(h/2) - T(h/4)} = 2^\alpha + \mathcal{O}(h^{\beta-\alpha}) \qquad (h \downarrow 0).$$

(c). Geef op basis van onderstaande tabel een zo goed mogelijke benadering van I. Motiveer je handelingen.

h	1/16	1/32	1/64	1/128
$T(h)$	1.480619812	1.446440125	1.430082703	1.422087097

Opgave 2

We onderzoeken benaderingen van integralen van het type

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

waarbij f voldoende glad is.

(a). Waarom geeft het gebruik van de trapeziumregel problemen? Waarom kunnen er geen bevredigende resultaten verwacht worden van het toepassen van een willekeurige kwadratuurformule $\sum_{i=0}^{n} w_i g(x_i)$ ter benadering van $\int_{-1}^{1} g(x)dx$ welke exact is voor iedere polynoom g van graad n?

We gaan nu aan de speciale vorm van de integrand aangepaste kwadratuurformules ontwikkelen. Met $a_n := I(x^n)$ mag je gebruiken dat $a_0 = \pi$, $a_1 = 0$, en voor $n \geq 2$, $a_n = (1 - \frac{1}{n})a_{n-2}$.

(b). Zij ϕ het lineaire interpolatiepolynoom van f met steunpunten -1 en 1. Bereken $I(\phi)$.

(c). Laat zien dat de fout in deze kwadratuurformule te schrijven is als

$$cf^{(n)}(\xi)$$

voor een $\xi \in [-1, 1]$, en bepaal de constanten c en n.

(d). Algemener bekijken we nu voor $a \in [0, 1]$, kwadratuurformules van het type

$$Q_a(f) = w_a(f(-a) + f(a)),$$

waarbij w_a zo gekozen is dat $Q_a(p) = I(p)$ voor alle polynomen p van graad kleiner of gelijk aan 1. Laat zien dat $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ de unieke waarde is waarvoor $Q_a(p) = I(p)$ voor alle polynomen p van graad 2. Tot op welke graad is $Q_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$ exact?

(e). Door gebruik te maken van een Hermite interpolatiepolynoom, bewijs dat

$$I(f) - Q_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}(f) = df^{(m)}(\eta)$$

voor een $\eta \in [-1, 1]$, en bepaal de constanten d en m.

Opgave 3

Zij f een voldoend gladde functie. We ontwikkelen in deze opgave een gecorrigeerde gerepeteerde trapeziumregel ter benadering van $\int_a^b f(x)dx$.

(a). Definieer

$$\phi_0(x) = 1, \qquad \phi_1(x) = x, \qquad \phi_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6},$$

$$\phi_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}, \qquad \phi_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{12} + \frac{1}{24}.$$

Merk op dat voor een gladde functie g, en $0 \leq i \leq 3$,

$$\int_{-1}^{1} g(x)\phi_i(x)dx = g(x)\phi_{i+1}(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} g'(x)\phi_{i+1}(x)dx,$$

en bewijs hiermee dat

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx - (g(1) + g(-1)) = -\frac{1}{3}(g'(1) - g'(-1)) + \frac{2}{45}g''''(\xi)$$

voor een $\xi \in [-1, 1]$.

M.b.v. het resultaat verkregen in (a) valt eenvoudig te bewijzen dat voor willekeurige $c < d$,

$$\int_c^d g(x)dx - \frac{d-c}{2}(g(d) + g(c)) = -\frac{(d-c)^2}{12}(g'(d) - g'(c)) + \frac{(d-c)^5}{30 \times 24}g''''(\xi)$$

voor een $\xi \in [c, d]$, maar dat hoef je niet te doen.

Deel nu het interval $[a, b]$ op in $n \geq 2$ stukjes ter lengte $h = \frac{b-a}{n}$. Zij $x_i = a + ih$. Noteer het resultaat van de gerepeteerde trapeziumregel ter benadering van $\int_a^b f(x)dx$ als $T(h)$.

(b). Bewijs dat

$$\int_a^b f(x)dx - T(h) = -\frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) + Ch^4 f''''(\eta)$$

voor een $\eta \in [a, b]$, en bepaal de constante C.

(c). Bepaal constanten c_0, c_1, c_2 z.d.d.

$$f'(a) - \frac{c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)}{h} = \mathcal{O}(h^2) \qquad (h \downarrow 0).$$

Er kan bewezen worden dat $\mathcal{O}(h^2)$-term in (c) gelijk is aan $\frac{h^2}{3}f'''(\theta)$ voor een $\theta \in (x_0, x_2)$, maar dat hoef je niet te doen. Nu volgt eenvoudig dat

$$f'(b) + \frac{c_0 f(x_n) + c_1 f(x_{n-1}) + c_2 f(x_{n-2})}{h} = \frac{h^2}{3}f'''(\omega)$$

voor een $\omega \in (x_{n-2}, x_n)$, hetgeen je ook niet hoeft aan te tonen.

(d). Bepaal een zinnig gecorrigeerde gerepeteerde trapeziumregel, en geef een uitdrukking voor de fout. Voor polynomen van welke graad is deze formule exact?