Tentamen Numerieke Wiskunde A

vrijdag 2 januari 2002, 9.00-12.00 uur.

- Vermeld op elk vel dat je inlevert je naam, en op het eerste vel bovendien je studentnummer, het aantal ingeleverde vellen en je studierichting.
- Het is *niet* toegestaan het diktaat of je aantekeningen te raadplegen.
- Resultaten uit een vorig onderdeel van een opgave mag je gebruiken, ook al lukt het je niet dat onderdeel te bewijzen.
- **SUCCES!**

Opgave 1

Laat f een voldoend gladde functie zijn. We benaderen $f'(x_0)$ door

$$Q(h) = \frac{-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_0+h) - \frac{1}{2}f(x_0+2h)}{h}.$$

(a). Bewijs m.b.v Taylor polynomen dat

$$f'(x_0) - Q(h) = c_1 h^2 f'''(x_0) + \mathcal{O}(h^3) \qquad (h \to 0), \tag{1}$$

en geef de constante c_1.

(b). We nemen nu aan dat de functiewaarden belast zijn met een *relatieve* fout ϵ, waarvoor steeds geldt dat $|\epsilon| \leq \overline{\epsilon}$. De ten gevolge van deze fouten verstoorde $Q(h)$ noemen we $\tilde{Q}(h)$. Bewijs voor een geschikte constante c_2 dat

$$|Q(h) - \tilde{Q}(h)| \leq \frac{c_2\overline{\epsilon}}{h} M_2, \tag{2}$$

waarbij $M_2 := \max_{x\in[x_0,x_0+2h]} |f(x)|$.

(c). Bepaal op basis van (2) en (1), waarbij we de hogere orde term voorlopig verwaarlozen, een optimale $h = h_{\text{opt}}$, en geef een bovengrens voor $|f'(x_0) - \tilde{Q}(h_{\text{opt}})|$.

(d). Zij p het Lagrange interpolatiepolynoom van f op de steunpunten x_0, x_0+h en x_0+2h. Laat zien dat $Q(h) = p'(x_0)$.

(e). Geef een uitdrukking voor $f(x)-p(x)$, en bewijs hiermee dat er een $\xi(x) \in (x_0, x_0+2h)$ is zo dat

$$f'(x_0) - Q(h) = c_1 h^2 f'''(\xi(x))$$

(Hint: Gebruik de produktregel voor het differentieëren, en het feit dat x_0 een steunpunt is van het Lagrange polynoom).

Opgave 2

Voor het berekenen van $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ beschouwen we, voor voldoend gladde f, de kwadratuurformule

$$Q(f) = 2f(0) + w(f'(\lambda) - f'(-\lambda)),$$

waarbij $\lambda \in (0,1]$ en w een geschikt gewicht.

(a). Toon aan dat ongeacht de waarde van w en λ, ieder polynoom x^{2i+1} ($i \in \mathbb{N}$) exact geïntegreerd wordt.

(b). Bepaal w en λ zodanig dat polynomen van een zo hoog mogelijke graad nog exact geïntegreerd worden.

(c). Bepaal C en k in de formule voor $R(f) := I(f) - Q(f)$ aannemende dat deze de volgende gedaante heeft:

$$R(f) = Cf^{(k)}(\xi) \qquad (\xi \in (-1,1)).$$

(d). Zij p het Hermite interpolatiepolynoom van f op de punten $-\lambda$, 0 en λ. Toon aan dat $Q(f) = I(p)$.

(e). Bewijs nu dat de veronderstelling in (c) juist is; d.w.z. $R(f)$ is inderdaad van de vorm $Cf^{(k)}(\xi)$.

We bekijken nu het geval $\lambda = 1$, maar vervangen tegelijkertijd het interval $[-1,1]$ door een algemeen interval $[a,b]$. M.a.w., we beschouwen de kwadratuurformule

$$\tilde{Q}(f) = (b-a)f(\tfrac{b+a}{2}) + w(f'(b) - f'(a))$$

ter benadering van $\int_a^b f(x)dx$.

(f). Bepaal w zodanig dat polynomen van een zo hoog mogelijke graad nog exact geïntegreerd worden.

Bewezen kan worden (hoef je niet te doen) dat er een constante $c \neq 0$ is waarvoor

$$\int_a^b f(x)dx - \tilde{Q}(f) = c(b-a)^5 f^{(4)}(\xi) \qquad (\xi \in (a,b)).$$

Verdeel nu $[a,b]$ in n gelijke delen met lengte h. Noteer de $n\times$-gerepeteerde kwadratuurformule als $T_n(f)$.

(g). Hoeveel evaluaties van f en f' vergt het opstellen van $T_n(f)$?

(h). Bewijs dat er een getal d is, welke slechts afhankelijk is van f, zodanig dat

$$\int_a^b f(x)dx - T_n(f) = dh^4 + o(h^4) \qquad (h \downarrow 0).$$

(i). Geef een schatting voor de fout in $T_{2n}(f)$ in termen van $T_{2n}(f)$ en $T_n(f)$.