Tentamen Numerieke Wiskunde I

vrijdag 27 oktober 2000, 14.00-17.00 uur.

- Vermeld op elk vel dat je inlevert je naam, en op het eerste vel bovendien je studentnummer, het aantal ingeleverde vellen en je studierichting.
- Het is *niet* toegestaan het diktaat of je aantekeningen te raadplegen.
- Resultaten uit een vorig onderdeel van een opgave mag je gebruiken, ook al lukt het je niet dat onderdeel te bewijzen.
- **SUCCES!**

Opgave 1

We gaan aangepaste kwadratuurformules maken voor integralen van het type

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\ln(x)dx,$$

waarbij f voldoende glad is.

(a). Waarom geeft het gebruik van de trapeziumregel i.h.a. problemen?

(b). Laat zien dat voor alle $k \in I\!N$, $\int_0^1 x^k \ln(x)dx = -\frac{1}{(k+1)^2}$.

(c). Zij ϕ het lineaire interpolatiepolynoom van f met steunpunten 0 en 1. Bereken $\int_0^1 \phi(x)\ln(x)dx$.

(d). Laat zien dat de fout in deze kwadratuurformule te schrijven is als

$$cf^{(n)}(\xi) \qquad (\xi \in [0,1]),$$

en bepaal de constante c en n.

(e). Voor $a \in (0,1]$, bekijken we nu kwadratuurformules van het type

$$Q_a(f) = w_{0,a}f(0) + w_{1,a}f(a),$$

waarbij $w_{0,a}$ en $w_{1,a}$ zo gekozen zijn dat $Q_a(p) = I(p)$ voor alle polynomen p van graad kleiner of gelijk aan 1. Laat zien dat $a = \frac{4}{9}$ de unieke waarde is waarvoor zelfs $Q_a(p) = I(p)$ voor alle polynomen p van graad 2.

(f). M.b.v. een geschikt gekozen interpolatiepolynoom, bewijs dat

$$I(f) - Q_{\frac{4}{9}}(f) = -\frac{17}{7776}f'''(\eta) \qquad (\eta \in [0,1]).$$

Opgave 2

Archimedes (250 v. Chr.) verkreeg onder- en bovengrenzen voor π door het opmeten van de omtrek van regelmatige ingeschreven danwel omgeschreven veelhoeken van een cirkel met diameter 1. In deze opgave beperken we ons tot de metingen van de ingeschreven veelhoeken.

(a). Zij $T_0(h)$ de omtrek van de n-zijdige regelmatige ingeschreven veelhoek waarbij $nh = 1$. Bewijs dat $T_0(h) = h^{-1}\sin(\pi h)$, zie figuur.

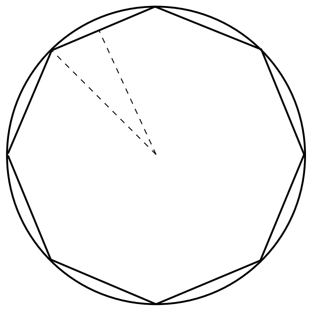

Figure 1: Ingeschreven regelmatige veelhoek. Merk op dat de hoek tussen de gestippelde lijnen gelijk is aan $\frac{1}{2}\frac{2\pi}{n}$.

(b). Laat zien dat er constanten (c_i) zijn zo dat $\forall m \in I\!\!N$

$$\pi - T_0(h) = \sum_{i=1}^{m} c_i h^{2i} + \mathcal{O}(h^{2m+2}) \qquad (h \to 0).$$

(c). Bepaal α_1, β_1 z.d.d. $T_1(h/2) := \alpha_1 T_0(h/2) + \beta_1 T_0(h)$ voldoet aan

$$\pi - T_1(h/2) = \mathcal{O}(h^4) \qquad (h \to 0).$$

Huygens gebruikte dit idee al in 1654. Archimes' metingen liepen tot $n = 96$. Aannemende dat Huygens de metingen van Archimedes gebruikte, en aannemende dat die exact waren, wat waren de fouten in de beste benaderingen die beiden verkregen?

(d). Versla Huygens, d.w.z. bepaal α_2, β_2 z.d.d. $T_2(h/4) := \alpha_2 T_1(h/4) + \beta_2 T_1(h/2)$ voldoet aan

$$\pi - T_2(h/4) = \mathcal{O}(h^6) \qquad (h \to 0).$$

Wat is de fout in $T_2(1/96)$?

Opgave 3

Laat f een voldoend gladde functie zijn. We benaderen $f'(x_0)$ door

$$Q(h) = \frac{-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_0+h) - \frac{1}{2}f(x_0+2h)}{h}.$$

(a). Bewijs m.b.v Taylor polynomen voor een geschikte constante c_1 de schatting

$$|f'(x_0) - Q(h)| \le c_1 h^2 M_1. \tag{1}$$

waarbij $M_1 := \max_{x\in[x_0,x_2]} |f'''(x)|$.
Toon ook aan dat

$$f'(x_0) - Q(h) = c_2 h^2 f'''(x_0) + \mathcal{O}(h^3) \qquad (h \to 0),$$

voor een constante c_2.

(b). We nemen nu aan dat de functiewaarden belast zijn met een *relatieve* fout ϵ, waarvoor steeds geldt dat $|\epsilon| \le \overline{\epsilon}$. De ten gevolge van deze fouten verstoorde $Q(h)$ noemen we $\tilde{Q}(h)$. Bewijs voor een geschikte constante c_3 dat

$$|Q(h) - \tilde{Q}(h)| \le \frac{c_3\overline{\epsilon}}{h} M_2, \tag{2}$$

waarbij $M_2 := \max_{x\in[x_0,x_2]} |f(x)|$.

(c). Bepaal op basis van (1) en (2) een optimale $h = h_{\text{opt}}$, en geef een bovengrens voor $|f'(x_0) - \tilde{Q}(h_{\text{opt}})|$.

(d). Laat zien dat $Q(h) = p'(x_0)$ met p een geschikt Lagrange interpolatiepolynoom van f.

(e). Geef een uitdrukking voor $f(x) - p(x)$, en bewijs hiermee dat er een $\xi \in (x_0, x_2)$ is zo dat

$$f'(x_0) - Q(h) = c_2 h^2 f'''(\xi)$$

(Hint: Gebruik de produktregel voor het differentieëren, en het feit dat x_0 een steunpunt is van het Lagrange polynoom).