Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college WISB251 werd in 2003/2004 gegeven door Dhr. R. Stevenson.

# Uitwerking[1] Numerieke wiskunde 1a (WISB251)
# 22 december 2003

## Opgave 1

a)

$$\begin{aligned}
-\tfrac{3}{2}f(x_0) &= -\tfrac{3}{2}f(x_0)\\
2f(x_0+h) &= 2[f(x_0)+hf'(x_0)+\tfrac{h^2}{2}f''(x_0)+\tfrac{h^3}{6}f'''(x_0)+\mathcal{O}(h^4)]\\
-\tfrac{1}{2}f(x_0+2h) &= -\tfrac{1}{2}[f(x_0)+2hf'(x_0)+\tfrac{(2h)^2}{2}f''(x_0)+\tfrac{(2h)^3}{6}f'''(x_0)+\mathcal{O}(h^4)]
\end{aligned}$$

Links en recht optellen, delen door $h$ en je vindt $c_1 = -1/3$. Klaar. Dit Taylor gedoe moet je wel paraat hebben. [opm.: als je een orde minder Taylort (Taylored?), dan houd je termen $f'''(\xi)$ over met verschillende $\xi$, met daarvoor coefficienten van verschillend teken. Tussenwaardestelling lukt dan niet om daar één term van te maken. Als dat wel had gekund, zou je een uitdrukking gekregen hebben zonder een $\mathcal{O}(h^4)$ term. Dat gebeurt nu in opgave (e)].

b)

$$\begin{aligned}
|Q(h)-\widetilde{Q}(h)| &= \left|\frac{-\frac{3}{2}f(x_0)+2f(x_0+h)-\frac{1}{2}f(x_0+2h)}{h} - \frac{-\frac{3}{2}f(x_0)(1+\varepsilon_0)+2f(x_0+h)(1+\varepsilon_1)-\frac{1}{2}f(x_0+2h)(1+\varepsilon_2)}{h}\right|\\
&= \left|-\frac{-\frac{3}{2}f(x_0)\varepsilon_0+2f(x_0+h)\varepsilon_1-\frac{1}{2}f(x_0+2h)\varepsilon_2}{h}\right| \le \frac{4\bar{\varepsilon}}{h}M_2.
\end{aligned}$$

c) $c_1h^2f'''(x_0)+\frac{4\bar{\varepsilon}}{h}M_2$ differentieren naar $h$. Nulpunt is $h_{\mathrm{opt}}$, invullen geeft een bovengrens voor $|f'(x_0)-\widetilde{Q}(h_{\mathrm{opt}})|$

d)

$$\begin{aligned}
p(x) = \quad & \frac{(x-(x_0+h))(x-(x_0+2h))}{(x_0-(x_0+h))(x_0-(x_0+2h))}f(x_0)+\\
& \frac{(x-x_0)(x-(x_0+2h))}{((x_0+h)-x_0)((x_0+h)-(x_0+2h))}f(x_0+h)+\frac{(x-x_0)(x-(x_0+h))}{((x_0+2h)-x_0)((x_0+2h)-(x_0+h))}f(x_0+2h)
\end{aligned}$$

(moet je weten). Differentieren, klaar.

e) Met $g(x) := (x-x_0)(x-(x_0+h))(x-(x_0+2h))$, $h(x) := \frac{f'''(\xi(x))}{6}$, is $f(x)-p(x) = g(x)h(x)$ (pff, moet je ook al weten). Differentieren geeft $f'(x)-p'(x) = g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$. $x = x_0$ invullen, en gebruiken dat $g(x_0) = 0$ geeft resultaat. [het is niet zo eenvoudig in te zien dat $h$ differentieerbaar is in $x = x_0$. Daarom ben ik niet zo blij met deze som].

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@A-Eskwadraat.nl

# Opgave 2

a) $(2i+1)\lambda^{2i} - (2i+1)(-\lambda)^{2i} = 0$.

b) $2 = \int_{-1}^{1} 1 \, \mathrm{d}x$.

$\frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = w(2\lambda - 2(-\lambda))$ geeft $w\lambda = \frac{1}{6}$.

Dit invullen in $\frac{2}{5} = \int_{-1}^{1} x^4 \, \mathrm{d}x = w(4\lambda^3 - 4(-\lambda)^3)$ geeft $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{10}}$ en $w = \pm\frac{1}{6}\sqrt{\frac{10}{3}}$.

c) Uit (b) volgt $k \geq 6$. Met $f(x) = x^6$ bereken je dat $R(f) \neq 0$. Blijkbaar is $k = 6$ (immers bij $k > 6$ zou de rest bij deze $f$ wel nul zijn). Nog steeds voor *deze* $f$ is $f^6(\xi) = 6!$, en dus $C = R(f)/6! = \cdots$.

d) De formule voor $Q(f)$ laat zien dat $Q(f) = Q(p)$. De exactheid van $Q$ op alle polynomen van graad 5 toont aan dat $Q(p) = I(p)$ ($p$ heeft graad 5).

e) Met $p$ als in (d), geldt $R(f) = I(f) - Q(f) = I(f) - I(p) = \int_{-1}^{1}(x-(-\lambda))^2 x^2 (x-\lambda)^2 f^{(6)}(\xi(x))/6! \, \mathrm{d}x$ (restterm Hermite interpolatie). $q(x) := (x-(-\lambda))^2 x^2 (x-\lambda)^2$ is tekenvast op $[-1,1]$, en *daarom* is $R(f) = f^{(6)}(\xi)/6! \int_{-1}^{1} q(x) \, \mathrm{d}x = \ldots$

f) Bekijk $f(x) = 1$, $f(x) = x - \frac{b+a}{2}$, $f(x) = (x - \frac{b+a}{2})^2$ etc, en dan vind je dat voor een geinige $w$, alle polynomen van graad 3 exact geintegreerd worden, maar niet voor hogere graad.

g) $n$ evals van $f$ en maar 2 van $f'$ (vallen weg op de interne randen van de kleine intervallen)

h) Uit de gegeven formule toegepast op de kleine intervalletjes volgt $\int_{-1}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x - T_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} ch^5 f^{(4)}(\xi_i)$ voor e.o.a. $\xi_i \in (ih, (i+1)h)$. $h\sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i) = \int_{-1}^{1} f^{(4)}(x) \, \mathrm{d}x + o(1)$ $(h \to 0)$, immers Riemann som, en dus $\int_{-1}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x - T_n(f) = ch^4(f'''(1) - f'''(-1)) + o(h^4)$ $(h \to 0)$.

i) Aaannemende dat $f'''(1) \neq f'''(-1)$ en $h$ is klein genoeg, dan $I - T_{2n} \approx \frac{1}{16}(I - T_n)$ en dus $I - T_{2n} \approx \frac{1}{15}(T_{2n} - T_n)$ (met "="-tekens als $o(h^4)$-term nul is).