Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{T}_{\!\mathcal{B}}\mathcal{C}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB251 werd in 2004/2005 gegeven door dhr. R. Stevenson.

Numerieke wiskunde (WISB251)
8 november 2004

- Vermeld op elk vel dat je inlevert je naam, en op het eerste vel bovendien je studentnummer, het aantal ingeleverde vellen en je studierichting.
- Het is *niet* toegestaan het diktaat of je aantekeningen te raadplegen.
- Resultaten uit een vorig onderdeel van een opgave mag je gebruiken, ook al lukt het je niet dat onderdeel te bewijzen.
- **SUCCES!**

Opgave 1

Laat f een voldoend gladde functie zijn. We benaderen $f''(0)$ door

$$Q(h) = \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}.$$

a) Bewijs dat er een constante c_1 is, en voor iedere h een $\xi \in [-h, h]$ met

$$f''(0) - Q(h) = c_1 h^2 f^{(4)}(\xi). \tag{1}$$

b) We nemen nu aan dat de functiewaarden belast zijn met een *relatieve* fout ε, waarvoor steeds geldt dat $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$. De ten gevolge van deze fouten verstoorde $Q(h)$ noemen we $\tilde{Q}(h)$. Bewijs voor een geschikte constante c_2 dat

$$|Q(h) - \tilde{Q}(h)| \leq \frac{c_2 \bar{\varepsilon}}{h^2} M_2, \tag{2}$$

waarbij $M_2 := \max_{x \in [-h,h]} |f(x)|$.

c) Bepaal op basis van (2) en (1) een optimale $h = h_{\text{opt}}$, en geef een bovengrens voor $|f''(0) - \tilde{Q}(h_{\text{opt}})|$.

d) Laat zien dat

$$f''(0) - Q(h) = c_1 h^2 f^{(4)}(0) + \mathcal{O}(h^4) \qquad (h \downarrow 0),$$

en bewijs hiermee dat er constanten λ en μ zijn met

$$f''(0) - (\lambda Q(h) + \mu Q(h/2)) = \mathcal{O}(h^4) \qquad (h \downarrow 0).$$

Opgave 2

We gaan kwadratuurformules maken voor integralen van het type

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Om het rekenwerk te beperken mag je gebruik maken van het feit dat met $a_n := I(x^n)$ geldt $a_0 = \frac{\pi}{2}$ en $a_{2n} = \frac{2n-1}{2n+2} a_{2n-2}$ $(n \geq 1)$.

a) Waarom kun je niet veel goeds verwachten van de toepassing met $g(x) := f(x)\sqrt{1-x^2}$ van een interpolatoire kwadratuurformule $g \mapsto \sum_{i=0}^{n} w_i g(x_i)$ ter benadering van $\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$? Welk gebeurt er i.h.b. bij de toepassing van de trapeziumregel?

We bekijken nu aangepaste kwadratuurformules.

b) Zij φ het lineaire interpolatiepolynoom van f op de steunpunten -1 en 1. Bereken $I(\varphi)$.

c) Laat zien dat fout in deze kwadratuurformule te schrijven is als

$$cf^n(\xi) \quad \text{voor e.o.a. } \xi \in [-1,1],$$

en bepaal n en de constante c.

Algemener onderzoeken we nu formules van de vorm

$$Q_a(f) := w(f(-a) + f(a))$$

waarbij $a \in [0,1]$.

d) Bepaal a en w z.d.d. $Q_a(p) = I(p)$ voor alle polynomen p van zo hoog mogelijke graad.

e) Beantwoord vraag 3 voor deze formule.

Opgave 3

Bewezen kan worden (hoef je niet te doen) dat voor voldoend gladde f,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2f(0) + \tfrac{1}{6}(f'(-1) + f'(1)) - \tfrac{7}{180} f^{(4)}(\xi) \quad \text{voor e.o.a. } \xi \in [-1,1].$$

a) Bewijs dat voor $a < b$ en voldoend gladde g,

$$\int_a^b g(y)\,\mathrm{d}y = (b-a)g(\tfrac{a+b}{2}) + \tfrac{1}{6}(\tfrac{b-a}{2})^2(g'(a)+g'(b)) - \tfrac{7}{180}(\tfrac{b-a}{2})^5 g^{(4)}(\eta) \quad \text{voor e.o.a. } \eta \in [a,b].$$

(Hint: Gebruik de bijectie $\ell : [-1,1] \to [a,b] : x \mapsto \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$).

Ter benadering van $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ verdelen we nu $[-1,1]$ in n gelijke delen met lengte h en passen op ieder deelintervalletje de kwadratuurregel afgeleid in 1) toe. Het resultaat noteren we als $T_n(f)$.

b) Hoeveel evaluaties van f en f' vergt het opstellen van $T_n(f)$?

c) Bewijs dat er een constante d is, zodanig dat

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - T_n(f) = dh^4(f^{(3)}(1) - f^{(3)}(-1)) + o(h^4) \qquad (h \downarrow 0).$$

d) Aannemende dat $f^{(3)}(1) \neq f^{(3)}(-1)$, geef een schatting voor de fout in $T_{2n}(f)$ in termen van $T_{2n}(f)$ en $T_n(f)$.