Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB251 werd in 2005/2006 gegeven door dhr. R. Stevenson.

Numerieke Wiskunde 1a (WISB251)
9 november 2005

- Vermeld op elk vel dat je inlevert je naam, en op het eerste vel bovendien je studentnummer, het aantal ingeleverde vellen en je studierichting.
- Het is *niet* toegestaan het diktaat of je aantekeningen te raadplegen.
- Resultaten uit een vorig onderdeel van een opgave mag je gebruiken, ook al lukt het je niet dat onderdeel te bewijzen.
- **SUCCES!**

Opgave 1

Voor $a < b$ en een voldoende gladde functie f op $[a, b]$ benaderen we $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ met de trapeziumregel

$$T(f) := \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Om het rekenwerk te beperken mag je gebruiken dat voor $k, m \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^k \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!\, m!\, (b-a)^{m+k+1}}{(m+k+1)!}.$$

a) Toon aan dat $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$ voor een $\xi \in [a, b]$.

We hopen een betere kwadratuurformule te krijgen door bij $T(f)$ een schatting van de restterm op te tellen die we verkrijgen door $f''(\xi)$ te benaderen met $\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$. Dit leidt tot de gekorrigeerde trapeziumregel

$$\tilde{T}(f) := T(f) - \frac{1}{12}(b-a)^2(f'(b) - f'(a)).$$

b) Laat zien dat $f''(\xi) = \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$ indien f een polynoom van graad ≤ 2 is, en bewijs hiermee dat $\tilde{T}(f)$ exact is voor alle polynomen van graad ≤ 2.

c) Laat zien dat als $\tilde{T}(f)$ exact is voor een willekeurig polynoom van graad precies 3, dat dan $\tilde{T}(f)$ exact is voor alle polynomen van graad ≤ 3. Toon dit laatste nu aan.

d) Zij p het Hermite interpolatiepolynoom van f op de steunpunten a en b. Laat zien dat $\tilde{T}(f) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$.

e) Bewijs dat $R(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \tilde{T}(f)$ te schrijven is als $Cf^{(k)}(\xi)$ voor een $\xi \in [a, b]$, en bepaal C en k.

f) Geef de $n\times$ gerepeteerde versie van de gekorrigeerde trapeziumregel. Hoeveel f en f' evaluaties zijn er vereist?

Opgave 2

a) Laat zien dat als een $(n+1)$ maal differentieerbare functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n+2)$ verschillende nulpunten heeft, dat er dan een ξ in het open interval opgespannen door deze nulpunten is met $g^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, \ldots, x_n$ verschillende punten, en $p \in P_n$ het Lagrange interpolatiepolynoom van f op deze punten. Voor *vaste* $x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$, definieer

$$g(t) = f(t) - p(t) - (f(x) - p(x))\frac{(t-x_0)\ldots(t-x_n)}{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}.$$

b) Laat zien dat g $(n+2)$ verschillende nulpunten heeft.

c) Aannemende dat f $(n+1)$ maal differentieerbaar is, bewijs de bekende formule voor de rest bij Lagrange interpolatie (Hint: bereken $g^{(n+1)}(t)$).

Opgave 3

We willen een aangepaste kwadratuurformule maken voor integralen van het type

$$I(f) = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

a) Waarom geeft het gebruik van de trapeziumregel problemen indien $f(0) \neq 0$?

Beschouw nu de kwadratuurformule $Q(f) := w_0 f(0) + w_1 f'(0) + w_2 f(1)$

b) Bepaal de gewichten w_0, w_1, w_2 zo dat voor polynomen p van een zo hoog mogelijke graad geldt $I(p) = Q(p)$.

Laat nu bij gegeven f, P het interpolatiepolynoom van graad hoogstens 2 zijn met $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$ en $P(1) = f(1)$.

c) Bewijs dat $Q(f) = I(P)$.

d) Bewijs dat $I(f) - Q(f) = -\frac{2}{105} f^{(3)}(\eta)$ voor zekere $\eta \in (0, 1)$.