Uitwerkingen tweede deeltentamen Game Theory

Januari 14, 2009, 14.00-17.00.

Write your name and studentnumber on every page you hand in. The use of 'Game Theory', by H. Peters is allowed. You can write your answers in Dutch.

Exercise 1

(a) Take $T = 1$. Show that the following strategy:

player 1:	at $t = 0$, offer $q_0 = 1 - v$	(S_1)
player 2:	at $t = 0$, accept any offer $q_0 \leq 1 - v$	
	at $t = 0$, choose O if $q_0 > 1 - v$	(S_2)

is a subgame perfect equilibrium (SPE).

(4 pt) Antwoord: Om aan te tonen dat een paar strategieën een SPE vormt moet je laten zien dat ze bij elk subgame een Nash evenwicht vormen. Dit is een spel met perfect information, dus kan je backward induction toepassen. Omdat $T = 1$, is de extensive form erg kort (maak een plaatje!). In de laatste node is speler 2 aan zet. Hij kan kiezen uit O, R en A. Zijn optimale keuze hangt af van q_0. Als $q_0 \leq 1 - v$, dan is A optimaal, anders O.
Gegeven deze strategie van speler 2, is het voor speler 1 optimaal om $q_0 = 1 - v$ te bieden.

(b) Show that player 1 does not have a best reply to the alternative strategy

player 2:	at $t = 0$, accept any offer $q_0 < 1 - v$	
	at $t = 0$, choose O if $q_0 \geq 1 - v$	(S_2^*)

Use this to prove that the set $\{S_1, S_2\}$ is the unique SPE for the game with $T = 1$.

(4 pt) Antwoord: Een best reply van speler 1 zou in dit geval een waarde van q_0 zijn die maximaal is en tegelijkertijd $q_0 < 1 - v$. Zo'n waarde bestaat niet. (2pt)
S_2 en S_2^* zijn de enige twee optimale strategieën van speler 2. Omdat bij S_2^* geen optimale strategie voor speler 1 hoort, kan S_2^* geen onderdeel uitmaken van een SPE. Daarom is $\{S_1, S_2\}$ het unieke SPE. (2 pt)

(c) Take $T = 2$. Give the diagram of the extensive form. Describe the SPE, by giving strategies of players 1 and 2 at $t = 0$ and $t = 1$. Do this for the two cases $\delta > v$ and $\delta < v$.

Give your answers in the form indicated below:

player 1:	at $t = 0$, offer $q_0 = \ldots$
	at $t = 1$, accept if ..., reject if ....
player 2:	at $t = 0$, accept if ..., reject if ..., play O if ...
	at $t = 1$, offer $q_1 = \ldots$

Motivate your answer, preferably with diagrams.

(8 pt) Antwoord: Diagram 2 pt.
$\delta > v$ (3 pt)
speler 1: Op $t = 0$ bied $q_0 = 1 - \delta$. Op $t = 1$ accepteer elk bod.
speler 2: Op $t = 0$ accepteer als $q_0 \leq 1 - \delta$, anders R. Op $t = 1$ bied $q_1 = 0$.
$\delta < v$ (3 pt)
speler 1: Op $t = 0$ bied $q_0 = 1 - v$. Op $t = 1$ accepteer elk bod.
speler 2: Op $t = 0$ accepteer als $q_0 \leq 1 - v$, anders O. Op $t = 1$ bied $q_1 = 0$.
Let op het verschil tussen δ en v en tussen R en O tussen de twee gevallen.

(d) From now we will consider the infinite horizon version of this game. Let x^* be the split offered by player 1 in the SPE of the game without outside option, see page 89-90 of Peters. Assume $v < x_2^*$. Formulate the SPE for the game with outside option. Motivate your answer.
You may use the fact that the strategy set $\{\sigma_1^*, \sigma_1^*\}$, defined on pages 89-90 of Peters, is an SPE of the game without outside option.

(6 pt) Antwoord: De SPE is het strategiepaar $\{\sigma_1^*, \sigma_2^*\}$, zoals gedefinieerd op blz. 89-90 van Peters (4 pt). Het bestaan van een outside option maakt in dit geval dus niks uit.
De motivatie (2 pt) is vergelijkbaar aan die in het boek. Er zijn eigenlijk maar twee soorten subgames, namelijk die waar een speler iets moet bieden en die waar een speler moet besluiten om A, R of O te spelen. Voor de tweede mogelijkheid mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $t = 0$. Het bod dat speler 1 doet, te weten x_2^*, is groter dan v. De keuze O voor speler 2 wordt dus strikt gedomineerd door A.
In alle andere subgames is O geen optie. De rest van de argumentatie op blz. 90 blijft dus geldig en we concluderen dat $\{\sigma_1^*, \sigma_2^*\}$ een SPE is.

(e) Assume $v > x_2^*$. Show that the following strategy pair is a SPE.

player 1:	always propose $(1 - v, v)$. Accept (z_1, z_2) if and only if $z_1 \geq \delta(1 - v)$.
player 2:	always propose $(\delta(1 - v), 1 - \delta(1 - v))$. Accept (z_1, z_2) if $z_2 \geq v$. Play O if $z_2 < v$. Never reject.

het bod Describe the outcome of the game and the payoffs.

(8 pt) Antwoord: De uitkomst is dat speler 1 op $t = 0$ het bod $q_0 = 1 - v$ doet en dat speler 2 dit accepteert. De payoffs zijn dus $1 - v$ voor speler 1 en v voor speler 2. (2 pt)
Omdat dit een spel met oneindige horizon is, kunnen we geen backward inductie toepassen. Om aan te tonen dat de gegeven strategie een SPE is, moet er worden aangetoond dat ze in elk subgame een Nash evenwicht induceert. Zoals hierboven al gezegd zijn er maar twee verschillende subgames die we zonder verlies van algemeenheid op $t = 0$ laten plaatsvinden. Het eerste type subgame is die waarin een speler een keuze moet maken uit A, R of O. De andere is het subgame waarbij een speler een bod doet. We zoeken een optimaal antwoord voor de ene speler bij de gegeven strategie van de andere. Zo kunnen we laten zien dat het strategie-paar voor elk subgame een Nash evenwicht induceert.
Neem aan dat speler 1 op $t = 0$ het bod $z_1 = 1 - v$ heeft gedaan, dan levert A voor speler 2 een waarde v op. De keuze voor O is niet beter, want die levert ook v op. Als speler 2 R zou spelen, dan kan hij z'n payoff maximaliseren door in de volgende ronde $z_1 = \delta(1 - v)$ te bieden (een lager bod wordt door speler 1 afgewezen, waarna de payoffs alleen maar minder worden). Dit levert voor speler 2 dan de payoff $\delta(1 - (\delta(1 - v))) = (\delta^2 - \delta + 1)v$. Omdat $\delta < 1$ is $\delta^2 < \delta$ en dus $\delta^2 - \delta + 1 < 1$. De conclusie is dus dat de keuze van R voor speler 2 op $t = 0$ niet optimaal is. Als het de beurt was van speler 1 om een keuze uit A of R te maken, dan kan hij het beste het bod $z_1 = \delta(1 - v)$, dat speler 2 hem maakt, aannemen. Als speler 1 dit bod zou afwijzen, dan gaat hij verder in het spel, waar zijn payoff, gegeven de strategie van speler 2, alleen maar kleiner kan worden.(3 pt)
Als speler 1 een bod moet doen, dan is zijn payoff gelijk aan 0 (nul) als z'n bod $z_2 < v$ is. In dat geval speelt speler 2 immers O. Het is dus optimaal voor speler 1 om op $t = 0$ het bod $z_2 = v$ te doen. Als speler 2 een bod moet doen, dan kan hij, gegeven de strategie van speler 1, het beste $z_1 = \delta(1 - v)$ bieden. Lagere boden worden immers verworpen, wat tot lagere payoffs voor speler 2 leidt. (3 pt)

(f) We will now consider a more general bargaining game, where player 1 has utility function $u_1(\alpha) = \alpha$ and player 2 has utility $u_2(\beta) = \sqrt{1 - (1 - \beta)^3}$. Assume there is no outside option. Sketch the feasible set in the (u_1, u_2)-plane.

(4 pt) Antwoord: De rand van de feasible set wordt geparametriseerd door $(u_1(t), u_2(1 - t))$, met $1 \leq t \leq 1$. In het (x, y)-vlak is dat het gebied begrensd door de x-as, de y-as en de kromme $y = \sqrt{1 - x^3}$.

(g) Still assuming no outside option, use 10.1 on page 137 of Peters to find expressions for the subgame perfect offers $x^*(\delta)$ and $y^*(\delta)$. Please note that page 137 contains an annoying misprint. The third line from the bottom should read: '...we obtain $y_1 = \delta\alpha$ and thus $\sqrt{1-\alpha} = x_2 = \delta y_2 = \delta\sqrt{1-\delta\alpha}$.' Note the extra δ in the last expression.

(6 pt) Antwoord: Je moet de vergelijking $x_2 = \delta y_2$ oplossen. Als je $x_1 = \alpha$ neemt, dan is $y_1 = \delta\alpha$, $x_2 = \sqrt{1-\alpha^3}$ en $y_2 = \sqrt{1-y_1^3} = \sqrt{1-(\delta\alpha)^3}$. (3 pt)
De oplossing is dan: $\alpha(\delta) = ((1-\delta^2)/(1-\delta^5))^{(1/3)}$. (3 pt)

(h) Calculate $\bar{x} = \lim_{\delta\to 1} x^*(\delta)$ to obtain the bargaining solution. Also give the distribution in terms of utilities.
Hint: $1 - \delta^n = (1-\delta)(1+\delta+\ldots+\delta^{n-1})$.

(6 pt) Antwoord: $\bar{x} = lim_{\delta\to 1}\alpha(\delta) = (2/5)^{1/3}$. Omdat $u_1(\alpha) = \alpha$, is de (physical) bargaining oplossing $(\alpha, 1-\alpha) = ((2/5)^{1/3}, 1-(2/5)^{1/3})$ (3 pt). De verdeling in termen van utilities is $(u_1(\alpha), u_2(1-\alpha)) = ((2/5)^{1/3}, \sqrt{3/5})$. (3 pt)

(i) Now assume that player 2 has an outside option $v > \bar{x}_2$. Give the coordinates of the outcome of the SPE, as $\delta \to 1$, in the (u_1, u_2)-plane and indicate the location of this bargaining solution in your sketch in (f).

(4 pt) Antwoord: bij nader inzien was dit niet zo'n goede vraag. Vergeet 'm dus!

Exercise 2

The Stag Hunt game takes it's name from a story by the French philosopher Jean Jacques Rousseau. Two players go hunting. If they work together, they can catch a stag (male deer). If each hunts on his own, he can only catch a hare. The value of half a stag is more than the value of a whole hare, so the payoff for player 1 can be given by:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Here, the first row (column) represents the choice 'hunt together' for player 1 (player 2) and the second row (column) represents the choice 'hunt alone' for player 1 (player 2). The payoff table for player 2 is A^T (the transposed of A), so this is a symmetric game.

(a) Find all Nash equilibria

(7 pt) Antwoord: $\{(1,0),(1,0)\}$, $\{(0,1),(0,1)\}$, $\{(1/2,1/2),(1/2,1/2)\}$

(b) Determine which of these are ESS (evolutionary stable strategies). Prove your statements.

(8 pt) Antwoord: Je moet hiervoor gebruik maken van Proposition 8.5, blz. 113. In het geval dat $x = (1, 0)$ of $x = (0, 1)$, blijkt er geen enkele $y \in \Delta^2$ te zijn met $y \neq x$ en $xAx = yAx$. Aan de premisse van de bewering 8.2 is dus niet voldaan, waaruit volgt dat de uitspraak waar is en dus dat deze evenwichten ESS zijn. (4 pt)
Voor $x = (1/2, 1/2)$ komt de gelijkheid $xAx = yAx$ neer op $1 = 1$, dus alle $y \in \Delta^2$ met $y \neq x$ voldoen aan de premisse. De conclusie van de uitspraak, $xAy > yAy$ correspondeert met $(y - 1/2)^2 < 0$. Bij deze uitspraak zijn veel tegenvoorbeelden te bedenken (elke $y \neq 1/2$), waaruit je concludeert dat deze x geen ESS is. (4 pt)

(c) Derive the corresponding replicator equation. Calculate the fixed points. Sketch the phase diagram and indicate which fixed points are stable.

(10 pt) Antwoord: De bijbehorende replicatorvergelijking is
$\dot{x} = x(1 - x)(2x - 1)$. (5 pt)
De vaste punten zijn $x = 0, 1/2, 1$. (2 pt) In het faseplaatje zijn $x = 0$ en $x = 1$ stabiel en $x = 1/2$ instabiel. (3 pt)

Exercise 3
Let the TU game (N, ν) be given by: $N = \{1, 2, 3\}$, $\nu(\{1, 3\}) = \nu(N) = 1$, $\nu(\{1, 2\}) = \beta < 1$ and $\nu(S) = 0$ for all other coalitions S.

(a) Determine the core of this game.

(8 pt) Antwoord: $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 = 0\,,\ x_1 \geq \beta\,,\ x_1 + x_3 = 1\}$.

(b) Determine the Shapley value of this game. Is there a value of β for which the Shapley value is in the core?

(9 pt) Antwoord: $1/6(3 + \beta, \beta, 3 - 2\beta)$. De Shapley value ligt alleen in de core als $\beta = 0$.

(c) Consider the 'weighted majority game', given by $N = \{1, 2, 3\}$, $\nu(S) = 1$ if $W(S) \geq 3$ and $\nu(S) = 0$ otherwise. Here, $W(S) = \sum_{i \in S} w_i$ with $w = (1, 1, 2)$. Calculate the nucleolus of this game.

(8 pt) Antwoord: De nucleolus is de verdeling $(0, 0, 1)$. Dit is onder meer in te zien door op te merken dat dit het enige element van de core is en de nucleolus ligt altijd in de core, als deze niet-leeg is.